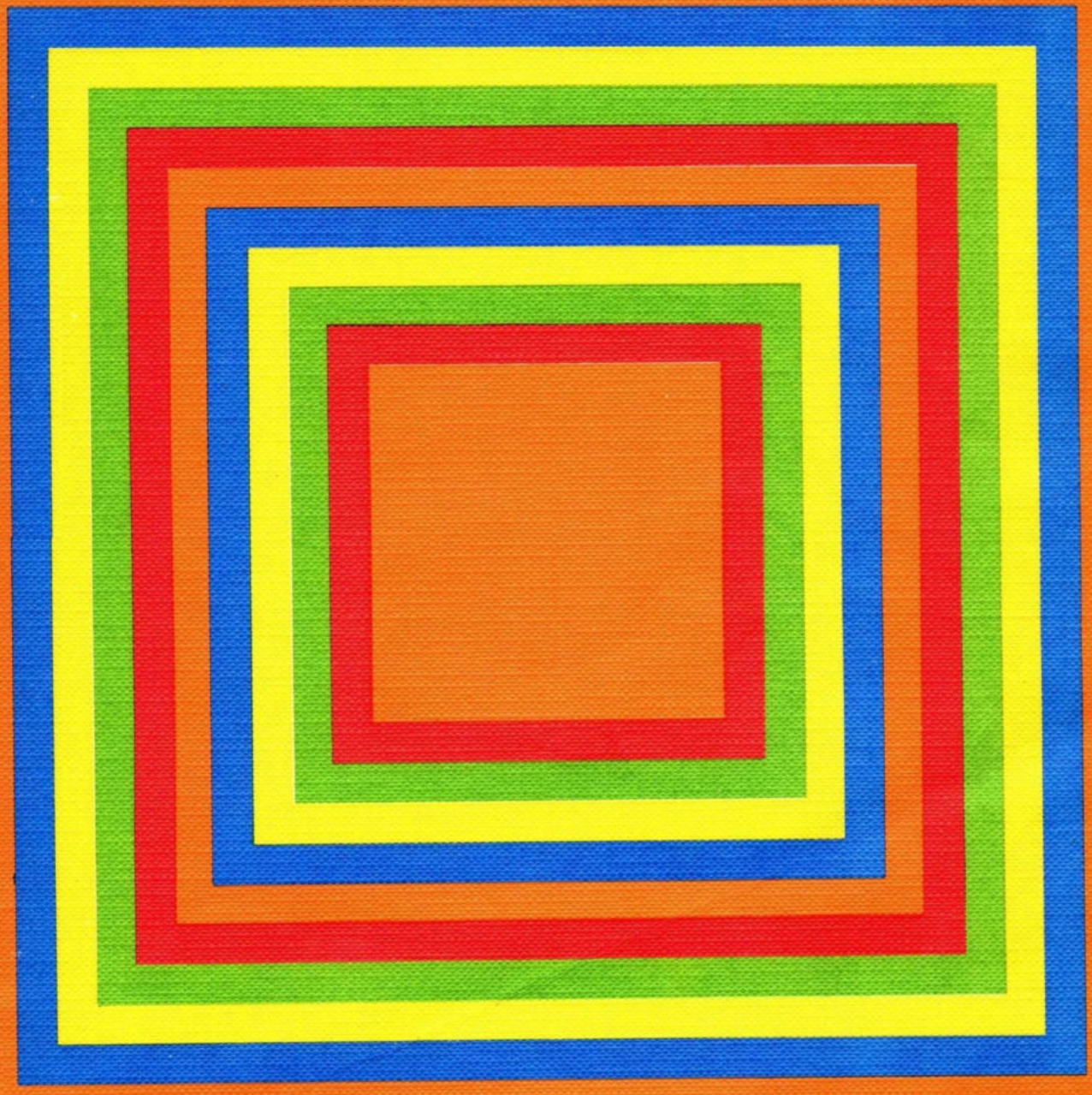
MATEMÁTICAS 7

EDUCACIÓN GENERAL BÁSICA



santillana

Indice

TEMA 1

Los números enteros 4

1. Números enteros: positivos y negativos. I.
2. Números enteros: positivos y negativos. II.
3. Representación gráfica de los números enteros.
4. Valor absoluto de un número entero.
5. Coordenadas en el plano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Actividades.

TEMA 2

Adición y sustracción de números enteros 10

1. Suma de dos números enteros del mismo signo.
2. Suma de dos números enteros de distinto signo.
3. Interpretación geométrica de la suma de números enteros.
4. Propiedades de la suma de números enteros. I.
5. Propiedades de la suma de números enteros. II.
6. Resta de números enteros. Igualdades equivalentes.
7. Propiedades de los números enteros opuestos.

Actividades.

TEMA 3

Ordenación y producto de números enteros 20

1. Ordenación de números enteros. I.
2. Ordenación de números enteros. II.
3. Multiplicación de números enteros. I.
4. Multiplicación de números enteros. II.
5. Multiplicación de números enteros. III.
6. Propiedades de la multiplicación de números enteros. I.
7. Propiedades de la multiplicación de números enteros. II.
8. Propiedades de la multiplicación de números enteros. III.

Actividades.

TEMA 4

Simplificación de la escritura. Divisibilidad en $\mathbb{Z}$ 30

1. Escritura simplificada de los números enteros. I.
2. Escritura simplificada de los números enteros. II.
3. Cálculo con números enteros. Paréntesis.
4. Cálculo con números enteros. Paréntesis y corchetes.
5. Divisibilidad en el conjunto de los números enteros. I.
6. Divisibilidad en el conjunto de los números enteros. II.
7. Divisibilidad en el conjunto de los números enteros. III.
8. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos enteros.

Actividades.

TEMA 5

Potencias y raíz cuadrada 40

1. Potencias de base entera y exponente natural. I.
2. Potencias de base entera y exponente natural. II.
3. Operaciones con potencias. I.
4. Operaciones con potencias. II.
5. Raíz cuadrada de un número entero.
6. Raíz cuadrada exacta y entera. Cálculo de la raíz cuadrada.
7. Raíz cuadrada exacta de números racionales positivos.
8. Raíz cuadrada aproximada de números racionales. I.
9. Raíz cuadrada aproximada de números racionales. II.

Actividades.

TEMA 6

Expresiones algebraicas, igualdades notables 50

1. Lenguaje algebraico.
2. Expresiones algebraicas. Valor numérico.
3. Monomios semejantes.
4. Operaciones con expresiones algebraicas sencillas.
5. Igualdades notables.

Actividades.

TEMA 7

Ecuaciones 58

1. Igualdad y ecuación. I.
2. Igualdad y ecuación. II.
3. Ecuaciones: soluciones, grado, términos.
4. Ecuaciones equivalentes por adición y por multiplicación. I.
5. Ecuaciones equivalentes por adición y por multiplicación. II.
6. Resolución de ecuaciones. I.
7. Resolución de ecuaciones. II.
8. Resolución de ecuaciones. III.

Actividades.

TEMA 8

Aplicaciones y funciones 68

1. Correspondencias.
2. Aplicación.
3. Clases de aplicaciones.
4. Función y aplicación.
5. Dominio y ecuación de una función.
6. Funciones de variable entera. Cálculo de originales o antiimágenes.

Actividades.

TEMA 9

La función lineal 76

1. Representación gráfica de funciones. I.
2. Representación gráfica de funciones. II.
3. La función lineal. I.
4. La función lineal. II.
5. Propiedades fundamentales.

Actividades.

TEMA 10

Resolución de problemas mediante ecuaciones 82

1. Método algebraico para la resolución de problemas. I.
2. Método algebraico para la resolución de problemas. II.
3. Problemas sobre móviles. I.
4. Problemas sobre móviles. II.
5. Otros problemas.

Actividades.

TEMA 11

Magnitudes directamente proporcionales 88

1. Proporciones. I.
2. Proporciones. II.
3. Cantidades de magnitud. Medidas.
4. Razón de dos cantidades. Propiedad.
5. Magnitudes directamente proporcionales. I.
6. Magnitudes directamente proporcionales. II.

Actividades.

TEMA 12

Aplicaciones de la proporcionalidad directa 96

1. Regla de tres simple directa. I.
2. Regla de tres simple directa. II.
3. Porcentajes o tantos por ciento. I.
4. Porcentajes o tantos por ciento. II.
5. Repartos directamente proporcionales. I.
6. Repartos directamente proporcionales. II.
7. Regla de compañía. I.
8. Regla de compañía. II.

Actividades.

TEMA 13

La proporcionalidad inversa 106

1. Función de proporcionalidad inversa. I.
2. Función de proporcionalidad inversa. II.
3. Magnitudes inversamente proporcionales.
4. Aplicaciones de la proporcionalidad inversa. I.
5. Aplicaciones de la proporcionalidad inversa. II.

Actividades.

TEMA 14

Aplicaciones de la proporcionalidad compuesta 112

1. Proporcionalidad compuesta.
2. Regla de tres compuesta directa.
3. Regla de tres compuesta. Directa-inversa.
4. Interés simple. I.
5. Interés simple. II.
6. Descuento.

Actividades.

TEMA 15

Proporcionalidad de segmentos. Teorema de Thales 120

1. Razones y proporciones de segmentos. Paralelas equidistantes.
2. Teorema de Thales.
3. Aplicaciones del teorema de Thales. I.
4. Aplicaciones del teorema de Thales. II.
5. Triángulos en posición de Thales.

Actividades.

TEMA 16

Semejanza. Escalas 126

1. Semejanza de triángulos. I.
2. Semejanza de triángulos. II.
3. Razón de perímetros y razón de áreas de dos triángulos semejantes.
4. Polígonos semejantes. Construcción de polígonos semejantes.
5. Escalas.

Actividades.

TEMA 17

Longitud de arcos 132

1. Ángulos centrales y arcos correspondientes.
2. Longitud de la circunferencia.
3. Longitud y amplitud de un arco. I.
4. Longitud y amplitud de un arco. II.

Actividades.

TEMA 18

Ángulos en los polígonos y en la circunferencia 138

1. Ángulos en los triángulos.
2. Ángulos en los polígonos.
3. Ángulos en la circunferencia.

Actividades.

TEMA 19

Rectas notables de un triángulo 142

1. Mediatriz de un segmento: propiedad.
2. Mediatrices de un triángulo.
3. Bisectriz de un ángulo. Propiedad.
4. Bisectrices de un triángulo.
5. Alturas de un triángulo.
6. Medianas de un triángulo.
7. Construcción de la tangente de una circunferencia desde un punto.

Actividades.

TEMA 20

Relaciones métricas en los triángulos rectángulos 150

1. Proyecciones.
2. Teorema de la altura.
3. Teorema del cateto.
4. Teorema de Pitágoras.
5. Aplicaciones del teorema de Pitágoras.
6. Aplicaciones de los teoremas (de la altura y del cateto).

Actividades.

TEMA 21

Área de las figuras planas 158

1. Área de cuadriláteros y triángulos.
2. Área de polígonos regulares.
3. Área del círculo.
4. Área de la corona circular.
5. Área del sector circular y área del segmento circular.
6. Área de otras figuras circulares.

Actividades.

TEMA 22

Áreas de los poliedros y de los cuerpos redondos 166

1. Poliedros regulares.
2. Prismas y pirámides.
3. Área de prismas. I.
4. Área de prismas. II.
5. Pirámide. Área lateral y área total.
6. Cuerpos redondos: cilindro, cono y esfera. I.
7. Cuerpos redondos: cilindro, cono y esfera. II.

Actividades.

TEMA 23

Volúmenes de cuerpos geométricos 176

1. Volumen. Unidades. I.
2. Volumen. Unidades. II.
3. Relación entre las unidades de volumen.
4. Relaciones entre las unidades de volumen y las de capacidad y masa.
5. Volumen del cubo y del ortoedro.
6. Volumen de prismas y pirámides.
7. Volumen de cilindros y conos.
8. Volumen de la esfera.

Actividades.

TEMA 24

Representación gráfica de datos 186

1. Conceptos generales. I.
2. Conceptos generales. II.
3. Representación gráfica de datos. I.
4. Representación gráfica de datos. II.
5. Representación gráfica de datos. III.

Actividades.

TEMA 25

Valores centrales y dispersión 194

1. Valores centrales. I.
2. Valores centrales. II.
3. Valores centrales. III.
4. Valores centrales. IV.
5. Medidas de dispersión. I.
6. Medidas de dispersión. II.

Actividades.

TEMA 1 LOS NÚMEROS ENTEROS

1. Números enteros: positivos y negativos. I

Cantidades positivas y cantidades negativas.

Si en un día de invierno oímos decir que la temperatura en Ávila (ciudad con bajas temperaturas en invierno) es de tres grados, nos quedará la duda de si se trata de tres grados bajo cero o de tres grados sobre cero.

Ⓐ Para expresar tres grados sobre cero se escribe **+3°.**

Para expresar tres grados bajo cero se escribe **−3°.**

Además de la temperatura, hay otras magnitudes que varían en dos sentidos.

Ⓑ **Las fechas referidas a la Era cristiana:**

— El año **−320** significa el año 320 antes de Cristo.

— El año **+100** significa el año 100 después de Cristo.

Ⓒ **Las cantidades de dinero** que posee o que gana una persona se consideran positivas, y las cantidades que debe, gasta o paga se consideran negativas.

— Elena ha ganado 2.000 ptas.
Se escribe: **+2.000 ptas.**

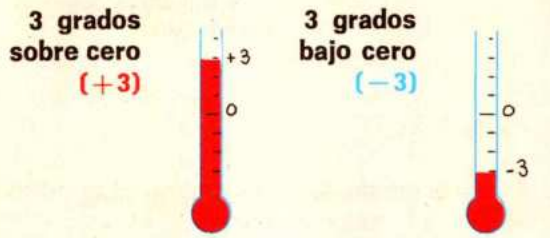
— Pedro ha gastado 3.000 ptas.
Se escribe: **−3.000 ptas.**

La recta **r** se puede recorrer en dos sentidos.

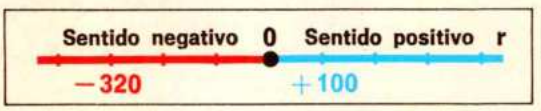
Los desplazamientos hacia la derecha se consideran positivos, y los desplazamientos hacia la izquierda, negativos.

POSITIVOS Y NEGATIVOS

Ⓐ **En los termómetros**



Ⓑ **En las líneas del tiempo**



Ⓒ **En el debe y en el haber**

	DEBE (-)	HABER (+)
• Ganancia de Elena		+2.000
• Gasto de Pedro	-3.000	

Hay magnitudes que varían en dos sentidos: positivo y negativo.

Para expresar las cantidades positivas se utilizan los números naturales con el signo más (+).

Para expresar las cantidades negativas se utilizan los números naturales con el signo menos (−).

1. Arquímedes nació el año 287 antes de Cristo.

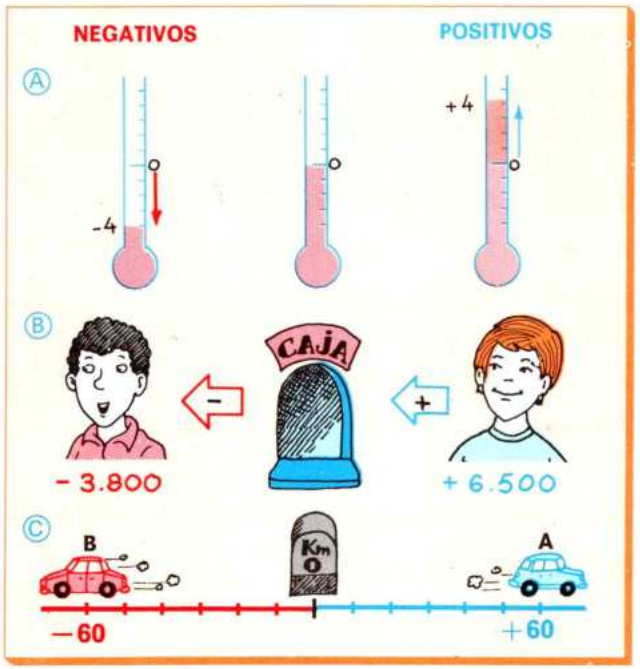
Expresa esta fecha con números naturales y con el signo correspondiente.

2. Expresa con números naturales y con el signo correspondiente:

a) El año 620 antes de Cristo.
b) El año 1492 después de Cristo.
c) El año actual.
d) Siete grados sobre cero.
e) Ocho grados bajo cero.
f) Elena ganó 5.000 ptas.
g) Antonio perdió 200 ptas.

2. Números enteros: positivos y negativos. II

Concepto de número entero.



Ⓐ Si la temperatura ha aumentado cuatro grados, la variación de la temperatura es **+4°.**

Si la temperatura ha descendido cuatro grados, la variación de la temperatura es **−4°.**

Ⓑ Luis ha ingresado en su cuenta corriente 6.500 ptas. La variación de sus ahorros es **+6.500 ptas.**

Juan ha gastado 3.800 ptas. La variación de sus ahorros es **−3.800 ptas.**

Ⓒ El coche **A** ha recorrido 60 km en sentido positivo. El desplazamiento del coche **A** ha sido **+60 km.**

El coche **B** ha recorrido 60 km en sentido negativo. El desplazamiento del coche **B** ha sido **−60 km.**

Los números +4, −4, +6.500, −3.800, +60, −60 son **números enteros.**

Un número entero es un número natural precedido del signo + o del signo −.
Los números enteros con el signo + se llaman números enteros positivos.
Los números enteros con el signo − se llaman números enteros negativos.

1. Expresa mediante enteros:

a) La temperatura ha aumentado 15 grados.
b) La temperatura ha disminuido 6 grados.

2. Expresa mediante números enteros:

a) Tengo 1.500 ptas.
b) Ingreso en mi cuenta del Banco 18.000 ptas.
c) Debo 1.200 ptas.
d) He pagado 3.200 ptas.

3. Expresa con números enteros:

a) El coche **A** ha recorrido 50 km en sentido positivo.
b) El coche **B** ha recorrido 50 km en sentido negativo.

4. Escribe:

a) Los diez primeros números positivos.
b) Los diez primeros números negativos.

3. Representación gráfica de los números enteros

El conjunto de los números enteros.

$\mathbb{Z} = \{\text{conjunto de números enteros}\}$

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$

$\mathbb{Z}^+ = \{+1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, \ldots\}$

$\mathbb{Z}^- = \{\ldots, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$

$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$

Cada número entero lleva un signo, + ó −. El número entero **0** también se puede escribir con signo, pero se suele escribir sin él. Por eso, **+0**, **−0** y **0** son tres símbolos que representan el número **0.**

El conjunto de los números enteros (positivos, negativos y el 0) se designa por la letra $\mathbb{Z}$.

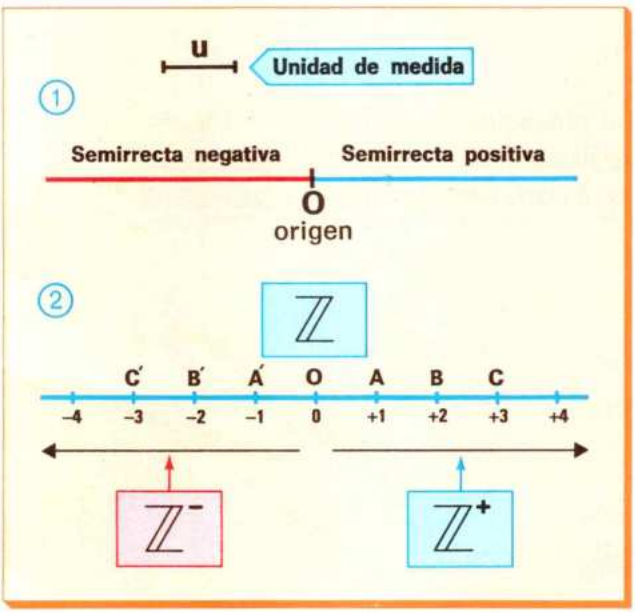
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \ldots\}$

El conjunto de los números enteros positivos se designa por $\mathbb{Z}^+$ y el de los números enteros negativos por $\mathbb{Z}^-$.

La unión de los conjuntos $\mathbb{Z}^+$ y $\mathbb{Z}^-$ y el número **0** da el conjunto $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$$

Representación gráfica.



① Fijada una unidad de medida $\overset{u}{\longmapsto}$, se llevan sobre una recta segmentos iguales a esta unidad a la derecha y a la izquierda de un punto **O** que se llama **origen.**

② En la semirrecta de la derecha se representan los números positivos, y en la semirrecta de la izquierda, los números negativos.

Así se obtienen los puntos **A, B, C,** que corresponden a los enteros positivos +1, +2, +3, ..., y los puntos **A′, B′, C′,** que corresponden a los enteros negativos −1, −2, −3, ...

Al punto **O** (origen de las dos semirrectas) le corresponde el número 0.

El número +1 se dice que es la abscisa del punto **A.**

El número +2 se dice que es la abscisa del punto **B.**

Del mismo modo, −1, −2 y −3 son las abscisas de los puntos **A′, B′** y **C′,** respectivamente.

1. Representa en una recta estos números enteros:

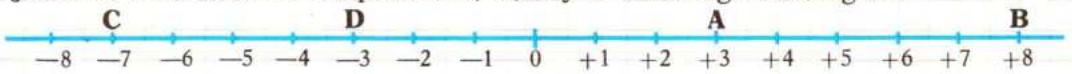
−2, −3, −4, −7, +2, +5, +3, +1, −1, +6, −6

2. Lee y contesta:

a) En una recta, representa el 0, los diez primeros números positivos y los diez primeros números negativos.

¿Qué número negativo está a igual distancia del 0 que el +4?

b) ¿Cuál es la abscisa de los puntos **A, B, C** y **D** en la siguiente figura?



c) ¿Hay entre los puntos indicados dos que sean simétricos respecto del punto **O**?

4. Valor absoluto de un número entero

$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, ...\}$

Número entero		Valor absoluto		Número natural
-6	→	$\lvert -6 \rvert$	=	6
$+6$	→	$\lvert +6 \rvert$	=	6
-7	→	$\lvert -7 \rvert$	=	7
$+8$	→	$\lvert +8 \rvert$	=	8

Los signos + y − que llevan los números enteros no son signos de operaciones (suma, resta), sino que indican simplemente la cualidad de ser positivos o negativos.

Cuando se prescinde del signo en un número entero, por ejemplo (−5), resulta el número natural 5. Este número natural 5 se llama **valor absoluto** del número entero −5.

El valor absoluto de un número se expresa encerrando este número entre dos barras.

- El valor absoluto de +5 es 5, y se escribe: $/+5/ = 5$.
- El valor absoluto de −6 es 6, y se escribe: $/-6/ = 6$.

Se llama valor absoluto de un número entero al número natural que resulta de prescindir del signo.

1. Escribe el valor absoluto de los siguientes números:

a) −2 c) −7 e) −56 g) +6 i) +34 k) −32
b) −5 d) +10 f) −34 h) +8 j) −24 l) +48

2. Completa en tu cuaderno:

a) $/-5/ =$ c) $/-8/ =$ e) $/+6/ =$ g) $/.../ = 64$
b) $/-100/ =$ d) $/+100/ =$ f) $/.../ = 2$ h) $/.../ = 8$

3. Contesta:

¿Cuál de las siguientes igualdades es falsa con seguridad?

a) $/+5/ = -5$ b) $/-6/ = 6$ c) $/a/ = -8$ d) $/b/ = 11$

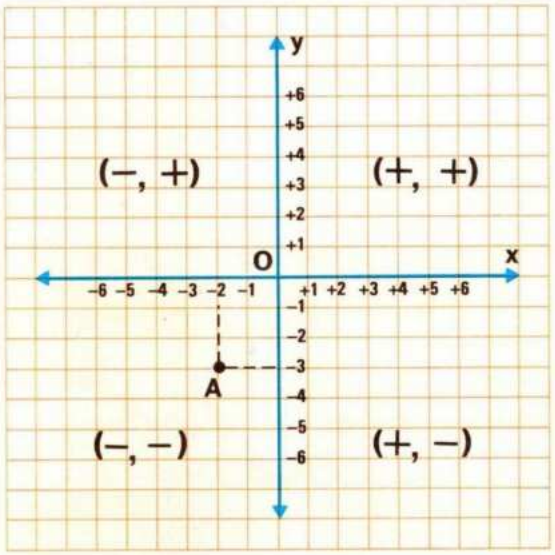
4. Lee y completa:

Describe mediante un número entero positivo o negativo cada una de las siguientes situaciones y halla después el valor absoluto de dicho número.

	Número entero	Valor absoluto
La temperatura es 4° bajo cero.		
Debo 2.000 ptas.		
Laura perdió 100 ptas.		
Pedro no perdió ni ganó.		
Cincuenta años antes de Cristo.		
La temperatura es 14° sobre cero.		
Mil doscientos años después de Cristo.		

5. Coordenadas en el plano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

x e y → EJES DE COORDENADAS



O → origen de coordenadas
x → eje de abscisas
y → eje de ordenadas

Ejes de coordenadas.

Observa las dos rectas perpendiculares **x** e **y** que se cortan en el punto **O**.

- Con un segmento unidad, a partir del punto **O**, se han representado en ambas rectas los números enteros.
- En la recta **x** los números positivos se han representado, a partir del punto **O**, en la semirrecta de la derecha.
- En la recta **y** los números positivos se han representado, a partir del punto **O**, en la semirrecta superior.
- El punto **O** se llama **origen de coordenadas.**
- La recta **x** se llama **eje de abscisas.**
- La recta **y** se llama **eje de ordenadas.**

Coordenadas de un punto.

A cada par de números enteros corresponde un punto del cuadriculado, y a cada punto del cuadriculado le corresponde un par de números enteros.

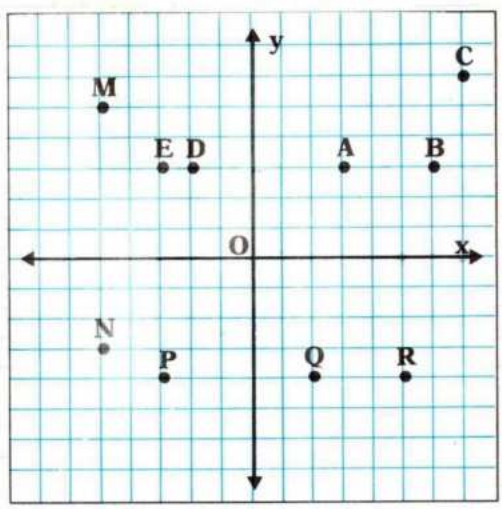
Así, el par **(−2, −3)** corresponde al punto **A.**

- −2 es la abscisa del punto **A.**
- −3 es la ordenada del punto **A.**

Los números −2 y −3 del par **(−2, −3)** se llaman **coordenadas cartesianas del punto A.**

1. Escribe las coordenadas que corresponden a los siguientes puntos:

A, B, C, D, E, M, N, P, Q, R



2. Señala los puntos cuyas coordenadas son:

(−5, −1), (−6, +3), (+1, +8)

3. Dibuja dos ejes de coordenadas y representa los puntos que se indican:

A (+4, +4) **C (−4, −4)**
B (−4, +4) **D (+4, −4)**

Une **A** con **B**, **B** con **C** y **C** con **D.**
¿Qué figura se forma?

4. Dibuja unos ejes de coordenadas y señala estos puntos:

A (1, 3), A′ (−1, 3), B (2, 5), B′ (−2, 5), C (4, 7), C′ (−4, 7)

a) ¿Respecto de qué recta son simétricos los pares de puntos **A** y **A′**, **B** y **B′**, **C** y **C′**?
b) Representa también los puntos **M** (3, 4), **M′** (3, −4), **N** (−4, 6), **N′** (−4, −6).
c) ¿Son simétricos los pares de puntos **M** y **M′** y **N** y **N′**? ¿Respecto de qué recta?

Actividades

CURIOSIDADES NUMÉRICAS

1. Expresa el número 24 empleando tres doses.

2. Un alambre tiene 10 metros de largo. Cada día se corta un trozo de 1 metro.
   ¿En cuántos días se queda cortado el alambre en 10 trozos?

3. En un cuadro mágico la suma de los números de cada fila es igual a la suma de los números de cada columna, e igual a la suma de los números de cada diagonal.
   Escribe los números que faltan en los siguientes cuadros mágicos:

139	132	
	136	
	140	

2.582		
	2.579	
2.578		2.576

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. El precio de un televisor oscila entre 90.000 y 130.000 ptas.; el precio de un tocadiscos entre 25.000 y 45.000 ptas., y el precio de una lavadora entre 35.000 y 60.000 ptas.
   a) ¿Se pueden comprar las tres cosas por 145.000 ptas.?
   b) ¿Cuál es la cantidad mínima necesaria para comprar las tres cosas?
   c) ¿Qué se puede comprar con 135.000 ptas.?
   d) Si se dispone de 250.000 ptas. para las tres cosas, ¿cuánto sobra con seguridad?

2. La nómina del mes de enero de un empleado de una empresa es como sigue:

Retribuciones o ingresos
- Sueldo: 126.549 ptas.
- Dietas: 2.835 ptas.
- Antigüedad: 665 ptas.

Deducciones o descuentos
- De S. Social: 6.967 ptas.
- Otros desc.: 20.394 ptas.

   Si el sueldo bruto es la suma de las retribuciones y el sueldo neto es el sueldo bruto menos la suma de las deducciones, calcula el sueldo bruto y el sueldo neto de ese empleado en el mes de enero.

3. Los gastos de una familia durante los meses de febrero y marzo han sido los siguientes:

Apartados	Febrero (ptas.)	Marzo (ptas.)
Alimentación	52.325	51.415
Vivienda	20.500	18.800
Gas y electricidad	4.748	5.112
Gasolina	3.853	3.749
Varios	5.285	4.751

   a) ¿En cuál de estos dos meses ha gastado más?
   b) ¿Qué apartado ha tenido el mayor aumento de gasto?
   c) ¿En qué apartado se ha conseguido el mayor ahorro de un mes a otro?
   d) ¿En cuál de los dos meses la familia ha gastado más en energía?

TEMA 2 ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

1. Suma de dos números enteros del mismo signo

Suma de dos números enteros positivos.

SUMA DE ENTEROS POSITIVOS

$(+60) + (+40) = +100$

$(+60) + (+40) = + (60 + 40)$

$(+a) + (+b) = + (a + b)$

Elena tiene 60 ptas. en un bolsillo y 40 ptas. en un monedero.

En total, Elena tiene:

$$(+60) + (+40) = +100$$

Observa que la suma se puede hacer sumando los valores absolutos $60 + 40 = 100$ y poniendo después el signo $+$.

En general, $(+a) + (+b) = + (a + b)$.

Suma de dos números enteros negativos.

SUMA DE ENTEROS NEGATIVOS

$(-60) + (-40) = -100$

$(-60) + (-40) = - (60 + 40)$

$(-a) + (-b) = - (a + b)$

Juan debe 60 ptas. a un compañero y 40 ptas. a otro compañero.

En total, Juan debe:

$$(-60) + (-40) = -100$$

Juan debe 100 ptas.

Observa que la suma se puede hacer sumando los valores absolutos $60 + 40 = 100$ y poniendo después el signo menos $(-)$.

En general, $(-a) + (-b) = -(a + b)$.

Para sumar dos números enteros del mismo signo se suman los valores absolutos y se pone el mismo signo de los sumandos.

1. Calcula:

a) $(+15) + (+20)$ c) $(-14) + (-20)$ e) $(-50) + (-70)$

b) $(+18) + (+13)$ d) $(-30) + (-70)$ f) $(+80) + (+40)$

2.

EJEMPLO RESUELTO

Signo de sumar

En la suma $(+40) + (+30) = +70$ los signos $+$ en rojo no son signos de la operación de sumar; son signos que indican que se trata de números positivos. En cambio, el signo $+$ de color azul es un signo de sumar.
Análogamente, en $(-60) + (-40) = -100$ los signos $-$ en rojo indican que se trata de números negativos.

Escribe en tu cuaderno los siguientes números coloreando de azul los signos $(+)$ que indiquen la operación de sumar.

a) $(+2) + (+6)$ c) $(+17) + (+14)$ e) $(-2) + (-6)$ g) $(-6) + (-12)$

b) $(+80) + (+32)$ d) $(+80) + (+70)$ f) $(-34) + (-28)$ h) $(-40) + (-50)$

2. Suma de dos números enteros de distinto signo

SUMA DE UN ENTERO POSITIVO Y OTRO NEGATIVO

$(+60) + (-40) = +20$

$(+60) + (-40) = + (60 - 40)$

Si a y b son números naturales y a > b:

$(+a) + (-b) = + (a - b)$

PRIMER CASO

Cuando la suma es un número entero positivo.

Laura tiene 60 ptas. y debe a una amiga 40 ptas.
El saldo a favor de Laura es:

$$(+60) + (-40) = +20$$

Observa que se obtiene el mismo resultado restando los valores absolutos $60 - 40 = 20$ y poniendo después al resultado el signo $+$, que es el signo del sumando de mayor valor absoluto.

En general, si **a** y **b** son números naturales y **a > b**:

$$(+a) + (-b) = +(a - b)$$

SUMA DE UN ENTERO NEGATIVO Y OTRO POSITIVO

$(-60) + (+40) = -20$

$(-60) + (+40) = - (60 - 40)$

Si a y b son números naturales y a > b:

$(-a) + (+b) = - (a - b)$

SEGUNDO CASO

Cuando la suma es un número entero negativo.

Juan debe 60 ptas. y tiene 40 ptas.

El saldo de Juan es negativo y sigue debiendo 20 ptas.:

$$(-60) + (+40) = -20$$

Juan debe todavía 20 ptas.

Observa que se obtiene el mismo resultado restando los valores absolutos $60 - 40 = 20$ y poniendo después al resultado el signo del sumando de mayor valor absoluto, en este caso el signo $-$.

En general, si **a** y **b** son números naturales, con **a > b**,

$$(-a) + (+b) = -(a - b)$$

Para sumar dos números enteros de distinto signo se restan sus valores absolutos y se pone el signo del sumando de mayor valor absoluto.

1. Calcula:

a) $(+12) + (-8)$ c) $(-30) + (+20)$ e) $(+50) + (-80)$
b) $(-12) + (+8)$ d) $(+30) + (-20)$ f) $(-50) + (+80)$

2. Calcula las siguientes sumas:

a) $(+3) + (-28)$ c) $(-2) + (+14)$ e) $(-9) + (-8)$
b) $(-5) + (+7)$ d) $(-8) + (+7)$ f) $(-13) + (-15)$

3. Calcula y contesta:

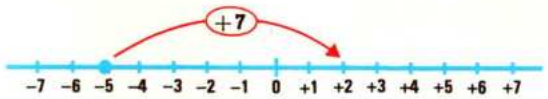
En una habitación la temperatura baja 5° y después baja otros 4°.

¿En cuánto ha descendido la temperatura? Exprésalo mediante una suma de números enteros.

3. Interpretación geométrica de la suma de números enteros

Suma de un número positivo a un número entero.

UN ENTERO CUALQUIERA + UN ENTERO POSITIVO



$(-5) + (+7) = +2$

$(+2) + (+4) = +6$

Sumar a un número entero otro entero positivo se puede interpretar como un desplazamiento en sentido positivo (hacia la derecha) de tantas unidades como indique dicho número positivo.

Así, sumar al número entero (-5) el número entero positivo $(+7)$ significa que a partir de (-5) hay que avanzar siete lugares hacia la derecha, como indica la figura, y así resulta:

$$(-5) + (+7) = +2$$

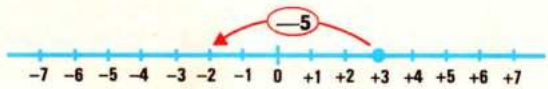
Observa, representada en la recta numérica, la suma

$$(+2) + (+4) = +6$$

Suma de un número negativo a un número entero.

UN ENTERO CUALQUIERA + UN ENTERO NEGATIVO

$(-1) + (-4) = -5$



$(+3) + (-5) = -2$

Sumar a un número entero otro entero negativo se puede interpretar como un desplazamiento en sentido negativo (hacia la izquierda) de tantas unidades como indique dicho número negativo.

Así, sumar el número entero (-1) al número entero negativo (-4), $(-1) + (-4)$, significa avanzar cuatro lugares hacia la izquierda a partir de (-1):

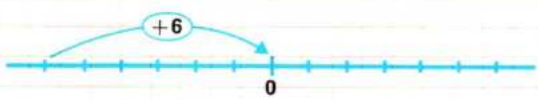
$$(-1) + (-4) = -5$$

Observa representada en la recta numérica la suma

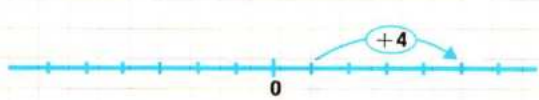
$$(+3) + (-5) = -2$$

1. Escribe debajo de cada recta numérica la suma que se ha representado en ella.

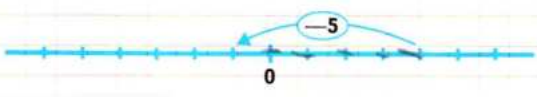
a)



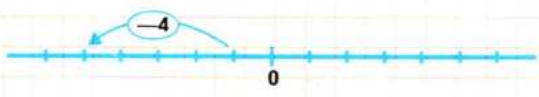
c)



b)



d)



2. Representa en la recta numérica las siguientes sumas. Hazlo en tu cuaderno.

a) $(-4) + (-2)$ c) $(-3) + (-5)$ e) $(-6) + (+6)$

b) $(-4) + (+2)$ d) $(-3) + (+5)$ f) $(-5) + (+5)$

Actividades

1. Haz las siguientes sumas:

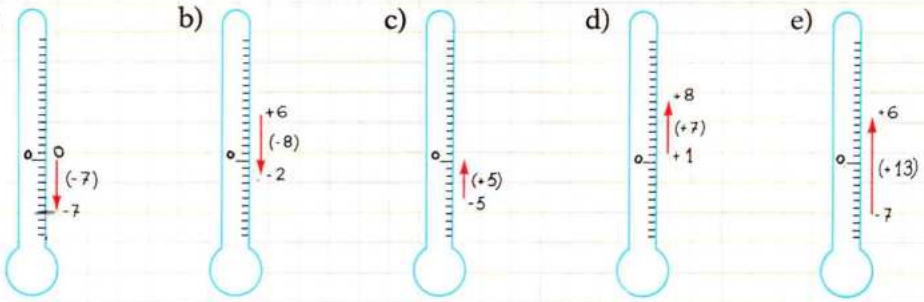
a) $(+56) + (+62)$ d) $(-9) + (-7)$ g) $(+72) + (-24)$

b) $(+30) + (-80)$ e) $(+9) + (-7)$ h) $(-12) + (-46)$

c) $(-20) + (+50)$ f) $(-9) + (+7)$ i) $(-28) + (-17)$

2. Expresa mediante una suma el cambio de temperatura indicado en cada termómetro.

a) b) c) d) e)



3. Representa en una recta en la que se han representado los números enteros (recta entera) las siguientes sumas:

a) $(+2) + (+5)$ c) $(-4) + (+3)$ e) $(+5) + (-5)$ g) $(+6) + (-6)$

b) $(-3) + (+4)$ d) $(+1) + (+4)$ f) $(-5) + (-4)$ h) $(-3) + (+6)$

4. Una persona debe 5.420 ptas. y cobra 6.000 ptas.

¿Cuánto tiene ahora?

Calcula el resultado mediante una suma de enteros.

5. Calcula los siguientes valores absolutos. Haz primero la suma.

a) $|(+2) + (-9)|$ b) $|(-3) + (-7)|$ c) $|(+15) + (-7)|$

6. Calcula:

a) $|(-9) + (-6)|$ y $|-9| + |-6|$ c) $|(+9) + (-6)|$ y $|+9| + |-6|$

b) $|(+9) + (+6)|$ y $|+9| + |+6|$ d) $|(-9) + (+6)|$ y $|-9| + |+6|$

Compara los resultados en cada caso.

¿Qué puedes decir del valor absoluto de una suma y de la suma de los valores absolutos de los sumandos?

7. Calcula:

a) $(+3) + (-5)$ b) $(-5) + (+3)$ c) $(-13) + (+6)$ d) $(+6) + (-13)$

¿Cómo son los resultados en a) y b)? ¿Y en c) y d)?

8. Calcula:

a) $[(+2) + (-3)] + (-5)$ b) $(+2) + [(-3) + (-5)]$

¿Cómo son los resultados en a) y en b)?

4. Propiedades de la suma de números enteros. I

Propiedad conmutativa.

PROPIEDAD CONMUTATIVA

$$(+5) + (-7) = (-7) + (+5)$$

$$-2 \quad = \quad -2$$

$$\mathbf{a + b = b + a}$$

La suma de dos números enteros no depende del orden de los sumandos.

Así, la suma $(+5) + (-7)$ y la suma $(-7) + (+5)$ son iguales: $(+5) + (-7) = (-7) + (+5)$.

En general, si **a** y **b** son números enteros, se verifica que: $\mathbf{a + b = b + a}$.

Ésta es la **propiedad conmutativa** de la suma de números enteros.

Propiedad asociativa.

PROPIEDAD ASOCIATIVA

$$[(+7)+(-5)]+(-4)=(+7)+[(-5)+(-4)]$$

$$(+2) + (-4) = (+7) + (-9)$$

$$-2 \quad = \quad -2$$

$$\mathbf{(a + b) + c = a + (b + c)}$$

La suma de varios números enteros no depende de la forma en que se asocian.

Así, la suma $[(+7) + (-5)] + (-4)$ y la suma $(+7) + [(-5) + (-4)]$ son iguales:

$$[(+7) + (-5)] + (-4) = (+7) + [(-5) + (-4)]$$

En general, si **a**, **b** y **c** son números enteros se verifica que: $\mathbf{(a + b) + c = a + (b + c)}$.

Ésta es la **propiedad asociativa** de la suma.

Las propiedades asociativa y conmutativa permiten escribir sumas de varios sumandos sin utilizar paréntesis y calcular estas sumas en el orden que se prefiera.

Ejemplo $(-2) + (-6) + (+3) = (-8) + (+3) = -5$

Elemento neutro.

ELEMENTO NEUTRO

$$(-8) + 0 = -8$$

$$\mathbf{a + 0 = a}$$

La suma de cualquier número entero con el cero es el mismo número entero.

Así, $(-8) + 0 = -8$ y $0 + (-8) = -8$.

En general, si **a** es un número entero:

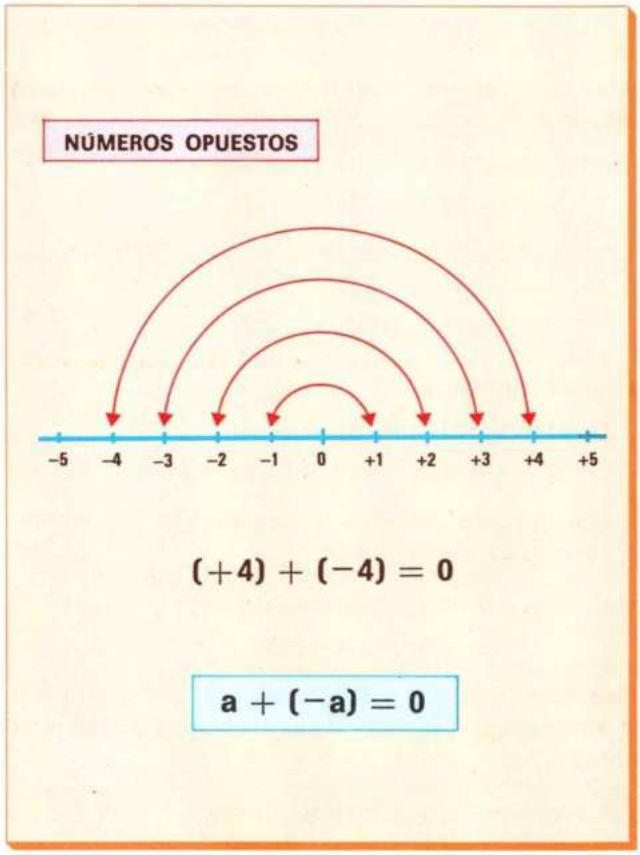
$$\mathbf{a + 0 = 0 + a = a}$$

Por cumplir esta propiedad se dice que el 0 es el elemento neutro de la suma de números enteros.

1. Calcula:

a) $(-9) + (+4)$
b) $(+4) + (-9)$
c) $(-5) + (+6) + (+2)$
d) $(-3) + (-4) + (-7)$
e) $(-3) + (-8) + (+5)$
f) $(+5) + (-6) + (-4)$
g) $(-3) + 0$
h) $(+4) + 0$
i) $(-5) + 0$

5. Propiedades de la suma de números enteros. II



Elemento opuesto.

Dado un número entero cualquiera, siempre se puede encontrar otro que sumado con él dé 0.

Así, dado el número entero **(+4)**, hay otro número entero **(−4)** tal que sumados dan 0:

$$(+4) + (-4) = 0$$

Se dice que los números (+4) y (−4) son **números enteros opuestos** o **números enteros simétricos.**

- El opuesto de (−6) es (+6), es decir, **op(−6) = +6,** porque (−6) + (+6) = 0.
- El opuesto de (+5) es (−5), es decir, **op(+5) = −5,** porque (+5) + (−5) = 0.

El opuesto de un número **a** se representa también por **−a.**

Observa que:

- El opuesto de un número entero positivo es un entero negativo.
- El opuesto de un número entero negativo es un entero positivo.
- Dos números opuestos tienen igual valor absoluto pero signo contrario.

  El opuesto de 0 es 0, ya que 0 + 0 = 0.

Dos números enteros se llaman números opuestos cuando su suma es cero. Todo número entero tiene un opuesto.

1. Completa la tabla:

Número entero	+12	−15	+6	−8	−12	0	−1	+2	−4	+16	−21
Número opuesto											
Suma	0										

2. Contesta:

a) ¿En qué parte de la recta están situados los opuestos de los números enteros positivos? ¿Y los opuestos de los números enteros negativos?

b) Todas las propiedades de la suma de números estudiadas en la página anterior y en ésta, menos una, las tiene también la suma de números naturales. ¿Cuál es esa propiedad?

3. Completa en tu cuaderno, con un número entero, las siguientes igualdades:

a) (−5) + ... = 0 b) (+8) + ... = 0 c) ... + (−3) = 0 d) ... + (− 4) = 0

4. Escribe dos números opuestos.

Halla el valor absoluto de ellos. ¿Cómo son estos valores absolutos?

6. Resta de números enteros. Igualdades equivalentes

Resta de números enteros.

Para restar dos números enteros se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.

Para hacer la resta $(-3) - (+4)$ se suma

$$(-3) + (-4) = (-7)$$

Observa que sumando la diferencia (-7) en el sustraendo $(+4)$ se obtiene el minuendo (-3):

$$(-7) + (+4) = (-3)$$

Veamos otros ejemplos:

$$(+3) - (-5) = (+3) + (+5) = (+8)$$
$$(-2) - (-6) = (-2) + (+6) = (+4)$$

Observa que la resta de enteros desaparece como operación y se reduce a una suma.

En general, si **a** y **b** son números enteros:

$$a - b = a + \text{op}(b)$$

Si **a**, **b** y **c** son números enteros, ocurre, como con los números naturales, que las siguientes igualdades son equivalentes:

$$a + b = c \leftrightarrow b = c - a \leftrightarrow a = c - b$$

Resta de enteros → Suma de enteros

$$(-3) - (+4) = (-3) + (-4) = -7$$
$$(+3) - (-5) = (+3) + (+5) = +8$$
$$(-2) - (-6) = (-2) + (+6) = +4$$

$$a - b = a + \text{op}(b)$$

1. Efectúa estas restas transformándolas antes en sumas:

a) $(+6) - (-9)$ d) $(-6) - (+4)$ g) $(-4) - (-2)$

b) $(+9) - (+9)$ e) $(-7) - (-4)$ h) $(+6) - (-8)$

c) $(+9) - (-9)$ f) $(+10) - (-2)$ i) $(+4) - (-4)$

2. Calcula:

a) $(-6) - (+3)$ b) $(+3) - (-6)$ c) $(-8) - (-6)$

Compara los resultados de a) y b). ¿Tiene la resta la propiedad conmutativa?

3. Haz en cada caso, en primer lugar, las operaciones del interior del corchete [ ]:

a) $(+6) - [(+3) - (-2)]$ b) $[(+6) - (+3)] - (-2)$

Compara los resultados de a) y b). ¿Tiene la resta la propiedad asociativa?

4. Utilizando las equivalencias fundamentales, escribe dos igualdades por cada una de las siguientes:

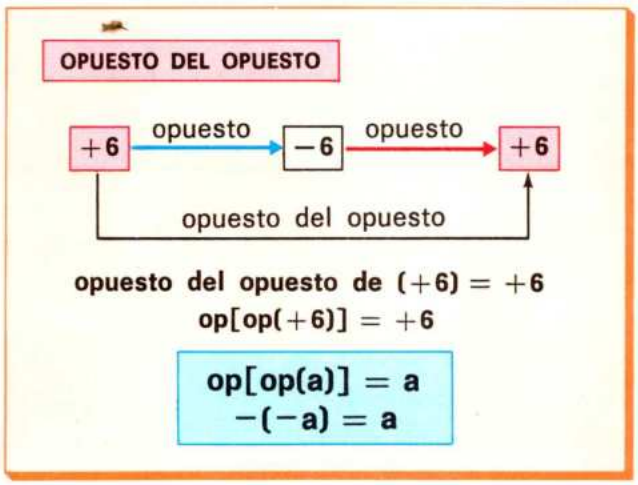
a) $(+5) + (-6) = (-1) \leftrightarrow (+5) = (-1) - (-6) \leftrightarrow (-6) = (-1) - (+5)$

b) $(+3) + (-5) = (-2)$

c) $(-7) + (+2) = (-5)$

7. Propiedades de los números enteros opuestos

Opuesto del opuesto.



Observa el esquema.

- La flecha azul indica que el opuesto de $+6$ es -6: **op(+6) = −6**, o, también, $-(+6) = -6$.
- La flecha roja indica que el opuesto de -6 es $+6$: **op(−6) = +6**, o también, $-(-6) = +6$.

Si hallamos el opuesto del opuesto de $+6$ resulta el mismo número $+6$:

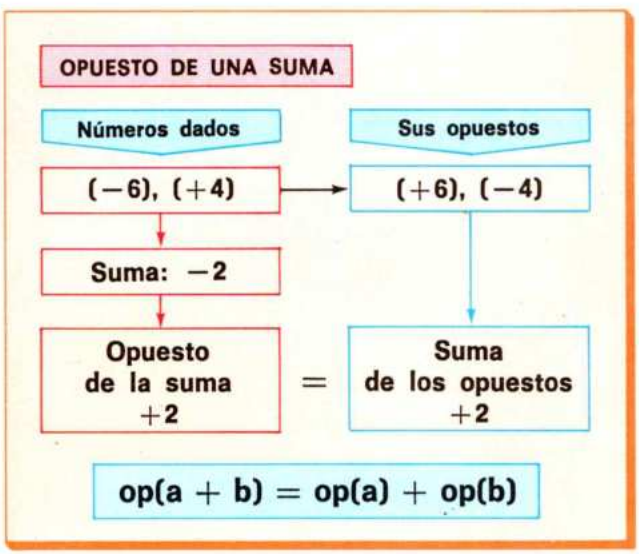
$$+6 \xrightarrow{\text{op}} -6 \xrightarrow{\text{op}} +6$$

Es decir, el opuesto del opuesto de un número es el mismo número.

En general, si **a** es un **número entero,** op[op(**a**)] = **a**;
$-(-\mathbf{a}) = \mathbf{a}$

El opuesto del opuesto de un número entero es el mismo número entero.

Opuesto de una suma.



Consideremos esta suma: $(-6) + (+4) = -2$.

El opuesto de esta suma es:

$$\text{op}[(-6) + (+4)] = \text{op}(-2) = +2$$

Por otra parte, los opuestos de los sumandos son:

$$\text{op}(-6) = +6;\ \text{op}(+4) = -4$$

La suma de los opuestos de los sumandos es:

$$(+6) + (-4) = (+2)$$

Observa que el opuesto de la suma es igual a la suma de los opuestos de los sumandos:

$$\text{op}[(-6) + (+4)] = \text{op}(-6) + \text{op}(+4)$$

En general, si **a** y **b** son números enteros, se verifica que:

$$\text{op}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{op}(\mathbf{a}) + \text{op}(\mathbf{b}),$$

o, también, $-(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (-\mathbf{a}) + (-\mathbf{b})$

El opuesto de la suma de dos números enteros es igual a la suma de los opuestos.

1. Calcula:

a) op[(+9) + (+3)]
b) op[(−8) + (−6)]
c) op[(−5) + (−2)]
d) op[(−3) + (−5)]
e) op[op(−8)]
f) op[op(−6)]

2. Calcula op[(−7) − (+3)].
Para ello, convierte la resta en suma.

3. Contesta:
¿Cuál es el opuesto del opuesto de -3? ¿Y el opuesto del opuesto de $+8$?

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

1. Calcula:

① $(+6) + (+8)$ ② $(+5) + (+3)$ ③ $(-6) + (-4)$ ④ $(-3) + (-12)$ ⑤ $(-7) + (-5)$ ⑥ $(-7) + (+3)$ ⑦ $(+12) + (-15)$ ⑧ $(-7) + (-10)$ ⑨ $(-100) + (+40)$ ⑩ $(+20) + (-60)$ ⑪ $(-50) + (+80)$ ⑫ $(-30) + (+90)$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Contesta:

a) ¿Qué signo tiene la suma de dos números enteros positivos?
b) ¿Qué signo tiene la suma de dos números enteros negativos?
c) ¿Puede ser la diferencia de dos números enteros negativos un número entero positivo? Pon un ejemplo.
d) ¿Cuál es el elemento neutro de la suma de números enteros? ¿Por qué?
e) ¿Cuál es el opuesto de -8 y el opuesto de $+8$?
f) ¿Cuál es el opuesto del opuesto de un número entero?
g) ¿Tiene la resta de números la propiedad conmutativa?

2. Calcula:

a) $(+5) + (-3) + (-8)$ b) $(+7) + (-2) + (-4)$ c) $(-3) + (-7) + (-5)$ d) $(-10) + (-5) + (+2)$ e) $(-7) + (-10) + (-3)$ f) $(-5) + (-6) + (+2)$

3. Calcula:

a) $(-5) - (-13)$ b) $(-35) - (-56)$ c) $(-96) - (+45)$ d) $(-59) - (+28)$ e) $(+64) - (-25)$ f) $(+36) - (+53)$

4. Escribe dos números opuestos. ¿Cuánto suman?

5. Calcula:

a) $(-5.628) + (-3.436)$ b) $(-4.826) + (+3.241)$ c) $(+8.724) + (-5.728)$ d) $(-9.572) + (+3.743)$

6. En un juego, Luis ganó 32 canicas, después perdió 15 canicas, más tarde ganó 42 canicas y después perdió 18 canicas.
¿Cuál fue el resultado del juego?

7. Completa en tu cuaderno:

a) $-(-3) = +3$ b) $-(-7)$ c) $-(-20)$ d) $-(-2)$

8. Luis subió 15 escalones de una escalera y después descendió 7 escalones.
Expresa esto mediante una suma de números enteros.

9. Calcula:

a) $(-3.528) + (-5.832)$ b) $(-6.457) + (+1.345)$ c) $(-3.756) + (+8.532)$ d) $(+6.200) + (+3.946)$ e) $(-1.001) + (+1.000)$ f) $(-5.328) + (+5.328)$

CURIOSIDADES NUMÉRICAS

Comprueba que el primer cuadro es un cuadro mágico. Es decir, que la suma de los números de cada fila es igual a la suma de los números de cada columna e igual a la suma de los números de cada diagonal.

¿Cuál es la suma?

Sabiendo que los dos cuadros siguientes son mágicos, completa los números que faltan.

+12	−16	−14	+6
−10	+2	0	−4
−2	−6	−8	+4
−12	+8	+10	−18

+9		+5
	+3	
+1		−3

−6	+8	−2
+4	0	
		+6

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. En las carreras de caballos un espectador apostó a las cinco carreras y los resultados fueron los siguientes: en la primera perdió 350 ptas.; en la segunda perdió 600 ptas.; en la tercera ganó 400 ptas.; en la cuarta perdió 600 ptas.; y en la quinta ganó 1.100 ptas.
   ¿Cuál fue el resultado final de sus apuestas?

2. La temperatura en una ciudad medida a las 8 de la mañana es de 2° sobre cero; de 8 a 10, la temperatura aumentó 3 grados; de 10 a 2, la temperatura aumentó en 6°; de 2 a 5 no varió; de 5 a 7 descendió 4°; de 7 a 9 descendió 3°, y de 9 a 12 descendió 7°.
   ¿Cuál es la temperatura a las doce de la noche?

3. El primero de mes el señor Rodríguez tenía en su cuenta corriente 13.000 ptas. Este mismo día ingresó 56.000 ptas. A la semana siguiente sacó 12.000 ptas. y en la siguiente volvió a sacar 15.000 ptas. El día 29 ingresó 16.000 ptas. de una deuda que le pagó un amigo.
   ¿Qué dinero le queda al final del mes?

4. Una sustancia que se encuentra a 40° pasa a 3° bajo cero.
   ¿Cuál es la variación de su temperatura?

5. La temperatura de una barra de hierro en un día de invierno es de 2° bajo cero. Se calienta y pasa a una temperatura de 50° sobre cero.
   ¿Cuál es la variación de la temperatura?

6. Un bloque de hierro está a 5° bajo cero. Se calienta hasta que consigue una variación de temperatura de 23°.
   ¿Cuál es la temperatura final?
   (Temperatura final − temperatura inicial = variación de temperatura.)

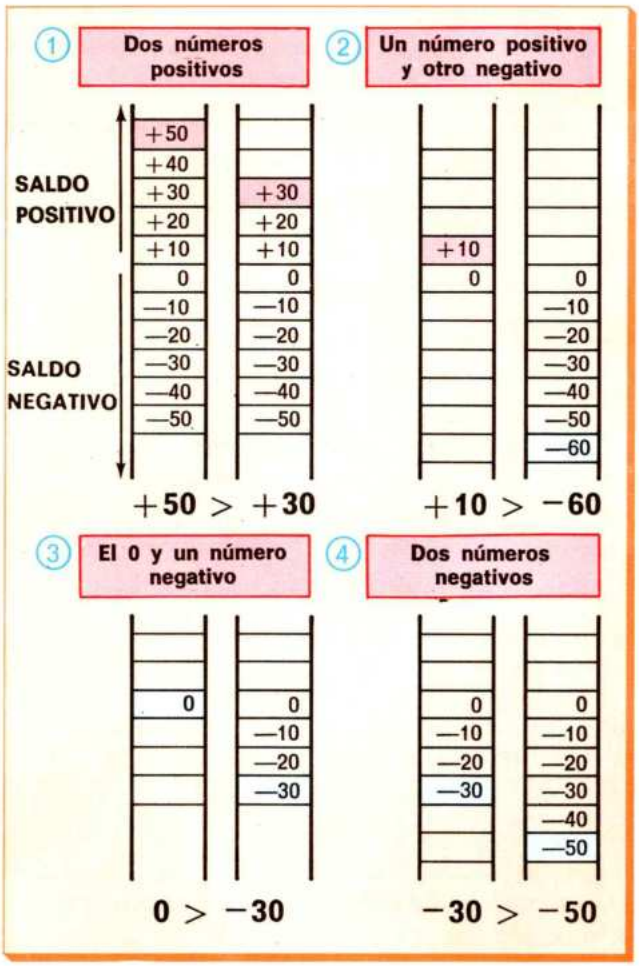
7. A las 6 de la tarde la temperatura de una ciudad es de 13°. Sabiendo que la variación de temperatura hasta las 12 de la noche fue de −16° ¿cuál fue la temperatura a las 12 de la noche?

8. Una sustancia que está a 8° bajo cero se calienta hasta ponerse a una temperatura de 15°.
   ¿Cuál es la variación de su temperatura?

TEMA 3 ORDENACIÓN Y PRODUCTOS DE NÚMEROS ENTEROS

1. Ordenación de los números enteros. I

Comparación de números enteros.



(1) Una persona que tiene 50 ptas. tiene más dinero que otra que tiene 30 ptas.:

$$+50 > +30$$

(2) Una persona que tiene 10 ptas. tiene más dinero que otra que debe 60 ptas.:

$$+10 > -60$$

(3) Una persona que no tiene ninguna peseta tiene más que otra que debe 30 ptas.:

$$0 > -30$$

(4) Una persona que debe 30 ptas. tiene más que otra que debe 50 ptas.:

$$-30 > -50$$

Observa que en cada uno de los cuatro casos se puede encontrar un número positivo que sumado al segundo nos dé el primero:

(1) Si a (+30) se le suma (+20), la suma será (+50).
(2) Si a (−60) se le suma (+70), la suma será (+10).
(3) Si a (−30) se le suma (+30), la suma será 0.
(4) Si a (−50) se le suma (+20), la suma será (−30).

Un número entero a es mayor que otro b, y se escribe a > b, si se puede hallar otro número entero positivo c tal que b + c = a.

1. Rodea el número entero mayor en cada caso:

a) +7 y +9 b) −7 y −9 c) +5 y −7 d) 0 y −3

2. Escribe en el círculo el signo > (mayor que) o el signo < (menor que):

a) −5 ◯ −6 b) −7 ◯ +3 c) 0 ◯ −1 d) +3 ◯ +4

3. Ordena en cada caso de mayor a menor estos números:

a) +3, −1, 0, −4, +5, +6
b) −5, +2, −7, +1, +3, −1
c) 0, +1, +2, −1, −2, +3, −3
d) −5, +5, −6, +6, 0, +8, −8

4. Contesta:

a) ¿Cuál es el número entero comprendido entre −7 y −9?
b) ¿Cuáles son los números enteros comprendidos entre −3 y +7?

2. Ordenación de los números enteros. II

Ordenación en la recta numérica.

ORDENACIÓN EN LA RECTA NUMÉRICA

−3 > −5 porque −3 está más a la derecha que −5

+4 > +1 porque +4 está más a la derecha que +1

Observa la recta donde se han representado los números enteros (recta entera).

El criterio geométrico de ordenación de los números enteros es el siguiente:

De dos números enteros cualesquiera, es mayor el que en la recta numérica está más a la derecha.

- $+4 > +1$, porque $+4$ está más a la derecha que $+1$. Observa que $|+4| > |+1|$.
- $-3 > -5$, porque -3 está más a la derecha que -5. Observa que $|-3| < |-5|$.
- $0 > -2$, porque 0 está más a la derecha que -2.

De dos números positivos, es mayor el que tiene mayor valor absoluto.
De dos números negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto.
Todo número positivo es mayor que cualquier número negativo.
El cero es mayor que cualquier número negativo.

1. Escribe los seis números enteros mayores y siguientes a −3.

2. Escribe los seis números enteros menores y anteriores a −3.

3. Escribe todos los números enteros que sean menores que +2 y mayores que −2.

4. Contesta:

Nos dicen que **x** es un número entero negativo.
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

$x < +1$ $x > 0$ $x < +2$ $x < 0$ $|x| > 0$

5. La relación mayor o igual (≥) entre números enteros.

EJEMPLO RESUELTO

Para expresar que un número entero **a** es mayor o igual que otro número entero **b**, se escribe **a ≥ b [≥ significa mayor (>) o igual (=)].**

La desigualdad $+5 \geq +5$ es cierta, porque $+5 = +5$.
La desigualdad $+7 \geq +5$ es cierta, porque $+7 > +5$.

Señala las desigualdades que son ciertas:

a) $-7 \geq -7$ b) $-15 \geq -20$ c) $+13 \geq 0$ d) $+5 \geq -3$

6. Escribe cinco números menores que −3 y cinco mayores que −3.

7. Escribe:

a) Los números comprendidos entre −4 y +4.
b) Los números comprendidos entre −5 y +5.

3. Multiplicación de los números enteros. I

Producto de dos números enteros positivos.

ENTERO POSITIVO × ENTERO POSITIVO

Variación semanal de la colección	Tiempo en semanas	Variación total de la colección
+4	+3	(+4) · (+3) = +12

Laura tiene una colección de cromos. Cada semana Laura compra 4 cromos. Dentro de tres semanas ¿en cuánto habrá variado el número de cromos de la colección de Laura?

Como cada semana compra cuatro cromos (+4) al cabo de tres semanas (+3) Laura tendrá 12 cromos más (+12):

$$(+4) \cdot (+3) = +12$$

Observa que se obtiene el mismo resultado si se multiplican los valores absolutos $4 \cdot 3 = 12$ y se pone el signo positivo (+) al producto.

Para multiplicar dos numeros enteros positivos se multiplican sus valores absolutos y se pone el signo + al producto.

Producto de un entero positivo por un entero negativo.

ENTERO POSITIVO × ENTERO NEGATIVO

Variación semanal de la colección	Tiempo en semanas	Variación total de la colección
+4	−3	(+4) · (−3) = −12

Hace tres semanas Laura tenía menos cromos en su colección.

¿Cuántos cromos menos tenía?

Como cada semana Laura compra 4 cromos, hace tres semanas (−3) Laura tenía 12 cromos menos (−12):

$$(+4) \cdot (-3) = -12$$

Observa que se obtiene el mismo resultado si se multiplican los valores absolutos $4 \cdot 3 = 12$ y se pone el signo negativo (−) al producto.

Para multiplicar un entero positivo por un entero negativo se multiplican sus valores absolutos y se pone el signo − al producto,

1. Calcula:

a) (+5) · (+6) c) (+10) · (+5) e) (+9) · (−4)
b) (+8) · (+9) d) (+6) · (−3) f) (+5) · (−7)

2. Contesta:

Si Laura compra cada semana 5 cromos, ¿en cuánto variará el número de cromos de su colección dentro de tres semanas?

3. Como en el caso de los números naturales, el producto de 0 (cero) por un número entero también es cero.

Completa:

a) (+5) · 0 c) 0 · (+4) e) 0 · (−8) g) 0 · 0
b) (+6) · 0 d) 0 · (−5) f) 0 · (−7) h) 0 · (+1)

4. Multiplicación de los números enteros. II

Producto de un entero negativo por un entero positivo.

ENTERO NEGATIVO × ENTERO POSITIVO

Variación semanal de los ahorros	Tiempo en semanas	Variación total de los ahorros
−4	+3	(−4) · (+3) = −12

Laura paga 4 pesetas cada semana por los cromos que compra. Estas 4 pesetas las saca de sus ahorros, que guarda en una hucha.

¿En cuánto han variado los ahorros de Laura al cabo de tres semanas de comprar cromos?

Como cada semana se gasta 4 pesetas (−4), al cabo de tres semanas (+3) Laura tendrá 12 pesetas menos (−12):

$$(-4) \cdot (+3) = -12$$

Observa que se obtiene el mismo resultado si se multiplican los valores absolutos $4 \cdot 3 = 12$ y se pone el signo negativo (−) al producto.

Para multiplicar un entero negativo por un entero positivo se multiplican sus valores absolutos y se pone el signo menos (−) al producto.

Producto de dos enteros negativos.

ENTERO NEGATIVO × ENTERO NEGATIVO

Variación semanal de los ahorros	Tiempo en semanas	Variación total de los ahorros
−4	−3	(−4) · (−3) = +12

Hace tres semanas, Laura tenía más dinero ahorrado. ¿Cuánto dinero tenía?

Como cada semana se gasta 4 pesetas (−4), hace tres semanas (−3) tenía 12 pesetas más que ahora (+12):

$$(-4) \cdot (-3) = +12$$

Observa que se obtiene el mismo resultado si se multiplican los valores absolutos $4 \cdot 3 = 12$ y se pone el signo positivo (+) al producto.

Para multiplicar dos enteros negativos se multiplican sus valores absolutos y se pone el signo más (+) al producto.

1. Calcula:

a) $(+6) \cdot (+8)$
b) $(-6) \cdot (-8)$
c) $(-6) \cdot (+8)$
d) $(+6) \cdot (-8)$
e) $(+9) \cdot (+4)$
f) $(-9) \cdot (-4)$
g) $(+9) \cdot (-4)$
h) $(-9) \cdot (+4)$
i) $(+1) \cdot (+1)$
j) $(-1) \cdot (-1)$
k) $(+1) \cdot (-1)$
l) $(-1) \cdot (+1)$

2. Si a y b son números naturales, completa:

① $(+a) \cdot (+b) = +(a \cdot b)$
② $(-a) \cdot (-b) =$
③ $(+a) \cdot (-b) =$
④ $(-a) \cdot (+b) =$

5. Multiplicación de los números enteros. III

REGLA DE LOS SIGNOS

$+$ **por** $+ \Longrightarrow +$

$-$ **por** $- \Longrightarrow +$

$+$ **por** $- \Longrightarrow -$

$-$ **por** $+ \Longrightarrow -$

Regla de los signos.

El signo del producto de dos números enteros se puede resumir así:

- **positivo** $\times$ **positivo** $=$ **positivo**
- **negativo** $\times$ **negativo** $=$ **positivo**
- **positivo** $\times$ **negativo** $=$ **negativo**
- **negativo** $\times$ **positivo** $=$ **negativo**

Esta regla de los signos se puede expresar también de esta forma.

Para multiplicar dos números enteros se multiplican sus valores absolutos. Si los factores tienen signos iguales, el producto es positivo, y si tienen signos distintos, el producto es negativo.

1. Calcula:

a) $(+5) \cdot (+1)$ c) $(-2) \cdot (+1)$ e) $(-1) \cdot (+1)$

b) $(+1) \cdot (-5)$ d) $(+1) \cdot (+3)$ f) $(-6) \cdot (+1)$

¿Qué observas?

2. Calcula:

a) $(+3) \cdot (-4)$ c) $(-8) \cdot (-6)$ e) $(+5) \cdot 0$ g) $0 \cdot (-8)$ i) $0 \cdot 0$

b) $(-4) \cdot (+3)$ d) $(-6) \cdot (-8)$ f) $0 \cdot (-7)$ h) $(-6) \cdot 0$ j) $0 \cdot (+4)$

Compara los resultados de a) y b) y los de c) y d). ¿Qué observas?

¿Qué resulta al multiplicar un número entero por 0?

3. Contesta:

¿Qué ha de suceder para que el producto de dos factores

a) sea positivo? b) sea negativo? c) sea 0?

4. Completa:

$\times (-3)$	$+30$	-12	0	-15	$+60$	$+15$	-36	$+36$	-1	$+1$

5. Contesta:

¿Cuál debe ser el número entero **n** para que $(-5) \cdot \mathbf{n} = -5$ y $(+6) \cdot \mathbf{n} = +6$?

6. Completa en tu cuaderno las tablas de multiplicar siguientes:

$\times$	-1	-2	$+3$	$+5$
-3				
-2				
-4				

$\times$	-3	-2	0	$+6$	$+2$	$+4$
-5						
-6						
$+5$						
$+6$						

6. Propiedades de la multiplicación de números enteros. I

Propiedad conmutativa.

PROPIEDAD CONMUTATIVA

$$\underbrace{(+3)\cdot(-5)}_{\downarrow\ (-15)} = \underbrace{(-5)\cdot(+3)}_{\downarrow\ (-15)}$$

$$(-15) = (-15)$$

$$\mathbf{a \cdot b = b \cdot a}$$

Al cambiar de orden los factores, el producto no varía:

$$(+3)\cdot(-5) = (-5)\cdot(+3)$$

En general, si **a** y **b** son dos números enteros cualesquiera, se verifica:

$$\mathbf{a \cdot b = b \cdot a}$$

Ésta es la **propiedad conmutativa** del producto.

Propiedad asociativa.

PROPIEDAD ASOCIATIVA

$$[(-3)\cdot(+2)]\cdot(-5) = (-3)\cdot[(+2)\cdot(-5)]$$

$$(-6)\cdot(-5) = (-3)\cdot(-10)$$

$$+30 = +30$$

$$\mathbf{(a \cdot b)\cdot c = a \cdot (b \cdot c)}$$

El producto de tres números enteros, por ejemplo

$$(-3)\cdot(+2)\cdot(-5)$$

se puede hacer asociando los dos primeros de la izquierda:

$$[(-3)\cdot(+2)]\cdot(-5)$$

o asociando los dos primeros de la derecha:

$$(-3)\cdot[(+2)\cdot(-5)]$$

En ambos casos se obtiene el mismo resultado:

$$[(-3)\cdot(+2)]\cdot(-5) = (-3)\cdot[(+2)\cdot(-5)]$$

En general, si **a**, **b** y **c** son tres números enteros cualesquiera, se verifica:

$$\mathbf{(a \cdot b)\cdot c = a \cdot (b \cdot c)}$$

Ésta es la **propiedad asociativa** del producto.

La propiedad asociativa nos permite resolver productos de tres o más factores.

Vamos a multiplicar $(+4)\cdot(-3)\cdot(-2)\cdot(+5)$:

$$(+4)\cdot(-3)\cdot(-2)\cdot(+5) =$$
$$= (-12)\cdot(-2)\cdot(+5) = (+24)\cdot(+5) = +120$$

Observa que el signo del resultado es + porque hay un número par (2) de factores negativos.

Para multiplicar varios números enteros se multiplican sus valores absolutos y al producto se le pone el signo + ó −, según que el número de factores negativos sea par o impar.

1. Calcula:

a) $[(-5)\cdot(-8)]\cdot(-6)$ c) $(-4)\cdot(+13)$

b) $(-5)\cdot[(-8)\cdot(-6)]$ d) $(+13)\cdot(-4)$

¿Cómo son los resultados obtenidos en a) y en b)? ¿Y los de c) y d)? ¿Por qué?

e) $(-2)\cdot(-5)\cdot(-6)$ g) $(-1)\cdot(-3)\cdot(+5)\cdot(-7)$

f) $(-3)\cdot(-2)\cdot(-1)$ h) $(-4)\cdot(-1)\cdot(+5)\cdot(+6)$

7. Propiedades de la multiplicación de números enteros. II

Elemento neutro.

ELEMENTO NEUTRO: +1

$(+1) \cdot (-5) = -5$

$(+6) \cdot (+1) = +6$

$$a \cdot (+1) = a$$

Observa que el producto de cualquier número entero por +1 es el mismo número. Por eso se dice que +1 es el **elemento neutro** del producto de números enteros.

Propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA

$$(+3)\cdot[(-2)+(+6)] = (+3)\cdot(-2)+(+3)\cdot(+6)$$

$$(+3) \cdot (+4) = (-6) + (+18)$$

$$(+12) = (+12)$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Como en el caso de los números naturales, la propiedad distributiva permite transformar productos en sumas, y viceversa.

Así, el producto $(+3) \cdot [(-2) + (+6)]$ se puede escribir en forma de suma: $(+3) \cdot (-2) + (+3) \cdot (+6)$.

$$\underbrace{(+3) \cdot [(-2) + (+6)]}_{\text{Primer miembro}} = \underbrace{(+3) \cdot (-2) + (+3) \cdot (+6)}_{\text{Segundo miembro}}$$

Observa que haciendo las operaciones se obtiene el mismo resultado en los dos miembros.

En general, si **a**, **b** y **c** son números enteros:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + b \cdot c$$

Ésta es la **propiedad distributiva** del producto respecto de la suma.

1. Completa esta tabla en tu cuaderno:

a	b	c	b + c	a · (b + c)	a · b	a · c
+5	−6	+2				
−6	+4	+2				
−8	−5	−7				
+3	−6	+2				

Compara la suma de los números de las dos últimas columnas con la antepenúltima.

¿Qué relación observas?

2. Calcula y contesta:

a) $(-7) \cdot (+1)$ c) $(-9) \cdot (+1)$ e) $(+15) \cdot (+1)$

b) $(+12) \cdot (+1)$ d) $(-12) \cdot (+1)$ f) $(-18) \cdot (+1)$

¿Qué observas en los resultados? ¿Cuál es el elemento neutro de la multiplicación de números enteros?

3. Calcula de dos maneras:

a) $[(-7) + (-5)] \cdot (-3)$ b) $[(+4) + (+6)] \cdot (-8)$ c) $(-5) \cdot [(+9) + (-5)]$

8. Propiedades de la multiplicación de números enteros. III

Sacar factor común.

SACAR FACTOR COMÚN

$(+6)\cdot(-8)+(+6)\cdot(+3)=(+6)\cdot[(-8)+(+3)]$

$a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c)$

Cuando en una suma o diferencia de productos figura un mismo factor, se puede aplicar la propiedad distributiva. Por ejemplo:

$(+6)\cdot(-8)+(+6)\cdot(+3)=(+6)\cdot[(-8)+(+3)]$

Factor común

Esta aplicación de la propiedad distributiva se llama **sacar factor común.**

Es decir, sacar factor común es aplicar la propiedad distributiva en esta forma:

$$a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c)$$

$$a\cdot b-a\cdot c=a\cdot(b-c)$$

1. Saca factor común en las siguientes expresiones:

a) $(+3)\cdot(-5)+(+3)\cdot(+12)$
b) $(-8)\cdot(+6)+(-8)\cdot(+3)$
c) $(-3)\cdot(+9)+(-3)\cdot(+8)$
d) $(+5)\cdot(+7)+(+5)\cdot(-1)$
e) $(-10)\cdot(+7)+(-10)\cdot(-3)$
f) $(-20)\cdot(+8)+(-20)\cdot(+5)$

2. Saca factor común en las siguientes expresiones:

a) $(-5)\cdot(+6)+(-5)\cdot(+8)$
b) $(-9)\cdot(+5)-(-9)\cdot(+6)$
c) $(-3)\cdot(-2)+(-5)\cdot(-2)$
d) $(-10)\cdot(-8)+(-10)\cdot(-12)$
e) $(-11)\cdot(+20)+(-11)\cdot(+8)$
f) $(-5)\cdot(-7)+(+13)\cdot(-7)$
g) $(+15)\cdot(-30)+(+15)\cdot(-60)$
h) $(-28)\cdot(+64)+(-28)\cdot(-30)$

3. Observa cómo se puede sacar factor común descomponiendo cada número entero de la suma en producto de factores.

EJEMPLO RESUELTO

$(+48)+(-30)=(+6)\cdot(+8)+(+6)\cdot(-5)=(+6)\cdot[(+8)+(-5)]$

$(-36)+(-45)=(+9)\cdot(-4)+(+9)\cdot(-5)=(+9)\cdot[(-4)+(-5)]$

Saca factor común descomponiendo previamente en producto de factores:

a) $(-15)+(-35)$
b) $(-12)+(-18)$
c) $(-40)+(+24)$
d) $(-10)+(+15)$
e) $(+70)+(-50)$
f) $(+14)+(-21)$

4. Saca factor común en las siguientes restas:

a) $(-3)\cdot(-5)-(-3)\cdot(+9)$
b) $(-6)\cdot(+13)-(-6)\cdot(+7)$
c) $(+25)\cdot(+17)-(+25)\cdot(-6)$
d) $(+8)\cdot(-9)-(-9)\cdot(+14)$
e) $(+15)\cdot(-8)-(+15)\cdot(+6)$
f) $(-4)\cdot(+10)-(-4)\cdot(-7)$

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

1. Calcula:

① $(-6)\cdot(-10)$ ② $(-8)\cdot(+9)$ ③ $(-15)\cdot(-10)$
④ $(-60)\cdot(-3)$ ⑤ $(-80)\cdot(+2)$ ⑥ $(+500)\cdot(-30)$
⑦ $(-46)\cdot(-100)$ ⑧ $(+48)\cdot(-10)$ ⑨ $(-75)\cdot(-100)$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Completa las tablas:

a	b	c	a · b	a · c	a · (b + c)
−2	−3	−4			
−5	+6	+8			
+3	−9	−6			

a · b	a · c	a · (b + c)
$(-6)\cdot(-5)$	$(-6)\cdot(-2)$	
$(-3)\cdot(-8)$	$(-3)\cdot(-4)$	
$(+5)\cdot(-7)$	$(+5)\cdot(-8)$	

2. Completa la tabla:

a	+5	+8	−8	−12	−9	−10	−15	+13	−42
b	−6	+6	−6	+5	−4	−15	−18	−5	−6
a · b	−30								
/a/	5								
/b/	6								
/a/ · /b/	30								
/a · b/									

- ¿Qué observas al comparar las dos últimas filas?
- ¿Qué relación hay entre el valor absoluto del producto y el producto de los valores absolutos de los factores?

3. Ordena de mayor a menor los números 0, −3, +4, −6, −8, +2, −5.

4. Escribe los números enteros comprendidos entre −3 y +3.
Si **x** es uno cualquiera de estos números ¿es cierto que $/x/ < 3$?

5. Si **a** es un número entero cualquiera ¿cuánto vale **a · 0**?

6. Observa esta serie de números y escribe los que faltan:
+35, +30, ..., +20, ..., ..., +5, 0, ..., ..., ..., −20

7. Se sabe que $(-5)\cdot a = -5$. ¿Qué número entero es **a**?

8. Si **b** es un número entero distinto de 0 y **b · r = 0** ¿qué número debe ser **r**?

9. ¿Hay algún número entero que multiplicado por 2 dé 1?

10. ¿Cuál es el número que multiplicado por (−1) da +1?

CURIOSIDADES NUMÉRICAS

Comprueba que el cuadro **A** es un cuadro mágico. Es decir, que la suma de los números de cada fila es igual a la suma de los números de cada columna e igual a la suma de los números de cada diagonal.

- ¿Cuánto vale esta suma?

Cuadro A

+9	−5	−4	+6
−2	+4	+3	+1
+2	0	−1	+5
−3	+7	+8	−6

Multiplica cada número del cuadro **A** por (−5) y forma otro cuadro **B** con los resultados. Comprueba que el cuadro **B** es también un cuadro mágico.

- ¿Cuáles son las sumas de cada fila, de cada columna y de cada diagonal?

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. El gasto anual en calefacción de una comunidad de seis plantas es 900.000 ptas.

Cada planta tiene cinco pisos, con las letras A, B, C, D y E.

El número de elementos de calefacción de los radiadores de cada piso es el siguiente:

- Los pisos de las letras A y B de cada planta tienen 100 elementos cada uno.
- Los pisos de las letras C y D de cada planta tienen 50 elementos cada uno.
- Cada uno de los seis pisos de la letra E tiene 75 elementos.

Calcula:

a) El gasto anual en pesetas que corresponde a cada elemento de calefacción de la casa.

b) El gasto anual de cada uno de los pisos de las letras A, B, C, D y E.

c) ¿Cuánto han pagado anualmente todos los pisos de la letra A?

d) ¿Y todos los pisos de la letra E?

2. Una colección de libros de literatura consta de 150 títulos.

El precio de los tres primeros juntos es de 325 ptas., y el precio de los restantes hasta la mitad de la colección es de 250 ptas. cada libro.

La segunda mitad de la colección se vende a 220 ptas. el libro.

¿Cuál es el importe de toda la colección?

3. Una isla tiene de superficie 140 km^2, y la densidad de población de esta isla (número de habitantes por kilómetro cuadrado) es 250. La isla tiene seis árboles por persona aproximadamente.

¿Cuál es el número aproximado de árboles de la isla?

4. En una bodega hay las siguientes cantidades de vino:

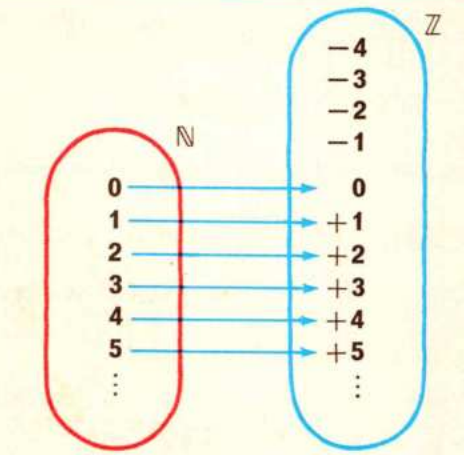
- 8 toneles con 10.000 litros cada uno.
- 15 toneles con 8 hl cada uno.
- 20 toneles con 6 hl cada uno.

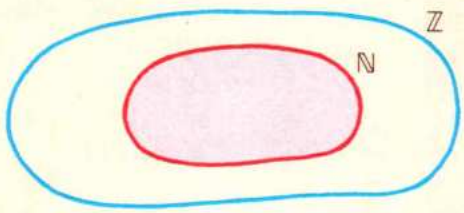
Calcula de dos formas diferentes el número total de litros de vino que hay en la bodega. Si se vende el vino a 150 ptas. el dal ¿cuánto se obtiene por la venta?

TEMA 4 SIMPLIFICACIÓN DE LA ESCRITURA. DIVISIBILIDAD EN $\mathbb{Z}$

1. Escritura simplificada de los números enteros. I

INCLUSIÓN DE LOS NÚMEROS NATURALES EN LOS ENTEROS





$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

$\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$

Identificación de los números naturales y de los números enteros positivos.

Consideremos el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales y el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \ldots\}$

Establezcamos una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$ haciendo corresponder a cada número natural el número entero positivo que resulta al ponerle el signo $+$.

Se observa que esta aplicación conserva la suma y el producto:

$$\begin{array}{ccccc} 2 & + & 3 & = & 5 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (+2) & + & (+3) & = & (+5) \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 2 & \cdot & 3 & = & 6 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (+2) & \cdot & (+3) & = & (+6) \end{array}$$

Esto significa que los números naturales se pueden identificar con los enteros positivos:

- 2 se identifica con $+2$.
- 3 se identifica con $+3$.

En general, el número natural **n** se identifica con **$+n$.**

En consecuencia, los números enteros positivos se pueden sustituir en las sumas y en los productos por números naturales.

Esta identificación de $\mathbb{N}$ con una parte de $\mathbb{Z}$, concretamente con $\mathbb{Z}^+$, permite considerar los números naturales como una parte de los enteros y escribir el conjunto $\mathbb{Z}$ así:

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Los números naturales se identifican con los números enteros positivos.

1. Une los números enteros idénticos:

$-5, +4, +2, +3, +0$

$2, 4, 7, 0$

2. Haz las siguientes sumas sumando números naturales:

a) $(+2) + (+4) = 2 + 4 = 6$
b) $(+5) + (+8)$
c) $(+6) + (+9)$
d) $(+10) + (+12)$
e) $(+8) + (+6)$
f) $(+4) + (+3)$
g) $(+2) + (+6)$
h) $(+5) + (+8)$
i) $(+6) + (+20)$
j) $(+8) + (+18)$
k) $(+3) + (+13)$
l) $(+3) + (+14)$

2. Escritura simplificada de los números enteros. II

Escritura simplificada de sumas.

SIMPLIFICACIÓN DE LA ESCRITURA DE SUMAS DE ENTEROS

Suma dada: $(+5) + (-3) + (+9)$

① $(+5) + (-3) + (+9) = (+5) - 3 + 9$

② $(+5) - 3 + 9 = 5 - 3 + 9$

$$5 - 3 + 9$$

La posibilidad de sustituir los números enteros positivos por los números naturales permite simplificar la escritura en las operaciones con números enteros.

① Las sumas de números enteros se pueden simplificar prescindiendo de los signos de sumar.

¡Cuidado! Sólo los signos + de la operación, no los signos + que indican que el número es positivo.

② Si el primer sumando es positivo, se suele escribir sin signo.

Ejemplo: $(+5) + (-3) + (+9) = 5 - 3 + 9$

Escritura simplificada de sumas y restas.

SIMPLIFICACIÓN DE LA ESCRITURA EN SUMAS Y RESTAS DE ENTEROS

Suma y resta dadas: $(+5) + (-2) - (+4)$

① Suma y resta de enteros → Suma de enteros

$(+5) + (-2) - (+4) = (+5) + (-2) + (-4)$

② Suma de enteros → Polinomio aritmético

$(+5) + (-2) + (-4) = 5 - 2 - 4$

① Si la expresión está formada por sumas y restas de números enteros, se escribe primero en forma de suma. Para ello basta recordar que restar un número es equivalente a sumar su opuesto.

Ejemplo: $(+5) + (-2) - (+4) =$
$= (+5) + (-2) + (-4)$

② Finalmente la suma se simplifica:

$(+5) + (-2) + (-4) = 5 - 2 - 4$

Observa que al simplificar la escritura queda en todos los casos una expresión formada por sumas y restas de números naturales. Esta expresión se llama **polinomio aritmético.**

Toda expresión formada por sumas y restas de números enteros se puede simplificar escribiéndola en forma de polinomio aritmético.

1. Escribe las siguientes expresiones en forma simplificada, de modo que al final quede un polinomio aritmético.

a) $(+5) + (-3) + (-6) + (-8)$
b) $(-7) + (-4) + (+9) + (+2)$
c) $(-3) + (-4) + (-5) + (-6)$
d) $(-7) + (+8) + (-3) + (-4)$

2. Simplifica la escritura y calcula:

a) $(-7) + (+4) - (-5) - (+6)$
b) $(+13) - (-12) - (-7) + (-3)$
c) $(-7) + (-4) - (-8) - (+2)$
d) $(+5) + (-3) - (-10) - (+2)$

3. Simplifica hasta llegar a un polinomio aritmético:

a) $(+3) + (-4) + (-8) + (-4)$
b) $(-5) + (-6) + (+12) + (+1)$
c) $(-3) + (-4) + (-5) + (+6)$
d) $(-8) + (-6) + (+3) + (-1)$

3. Cálculo con números enteros; paréntesis

Cálculo de un polinomio aritmético.

Un polinomio aritmético se puede calcular de dos formas.

Vamos a calcular el polinomio aritmético

$$6 + 2 - 3 + 4 - 8 - 5$$

PRIMERA FORMA

Se hacen las operaciones sucesivamente en el orden en que aparecen:

$$6 + 2 - 3 + 4 - 8 - 5 =$$
$$= 8 - 3 + 4 - 8 - 5 =$$
$$= 5 + 4 - 8 - 5 =$$
$$= 9 - 8 - 5 =$$
$$= 1 - 5 = -4$$

SEGUNDA FORMA

1. Se suman los números que llevan signo $+$:

$$6 + 2 + 4$$

2. Se suman los números que llevan signo $-$:

$$3 + 8 + 5$$

3. Se resta el segundo resultado del primero:

$$6 + 2 - 3 + 4 - 8 - 5 =$$
$$= (6 + 2 + 4) - (3 + 8 + 5) = 12 - 16 = -4$$

Cálculo con paréntesis.

Distinguiremos dos casos:

PRIMER CASO

Cuando el paréntesis va precedido del signo menos $(-)$.

Observa dos formas de calcular **$7 - (5 - 3)$**:

PRIMERA FORMA

Se hace primero la operación del interior del paréntesis:

$$7 - (5 - 3) = 7 - 2 = 5$$

SEGUNDA FORMA

Se aplica la definición de resta, es decir, sumando a 7 el opuesto de $(5 - 3)$:

$$7 - (5 - 3) = 7 + (-5 + 3) = 7 - 5 + 3 = 5$$

En la segunda forma se observa que se puede suprimir un paréntesis precedido del signo $-$ a condición de cambiar los signos del interior.

SEGUNDO CASO

Cuando el paréntesis va precedido del signo más $(+)$.

Observa dos formas de calcular **$6 + (-5 + 2)$**:

PRIMERA FORMA

Se hace primero la operación del interior del paréntesis:

$$6 + (-5 + 2) = 6 + (-3) = 6 - 3 = 3$$

SEGUNDA FORMA

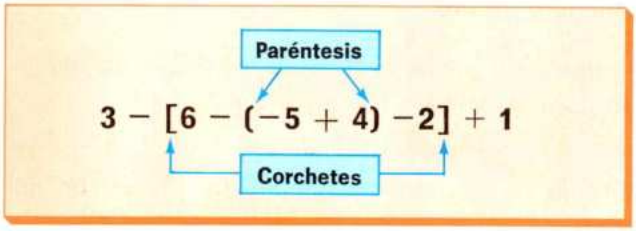
Se suprime el paréntesis dejando las sumas del interior con su signo:

$$6 + (-5 + 2) = 6 - 5 + 2 = 8 - 5 = 3$$

Cuando se suprime un paréntesis precedido del signo más $(+)$ se dejan los signos del interior del paréntesis como están.

Cuando se suprime un paréntesis precedido del signo menos $(-)$ se cambian todos los signos del interior del paréntesis.

4. Cálculo con números enteros; paréntesis y corchetes



Cálculo con corchetes.

Los corchetes son paréntesis con esta forma [ ].

Los corchetes se utilizan cuando en una expresión hay más de un paréntesis.

Observa dos formas de calcular este polinomio aritmético:

$$3 - [6 - (-5 + 4) - 2] + 1$$

PRIMERA FORMA

1. Se hace primero la operación del interior del paréntesis.
2. Después la operación del interior del corchete:

$$\begin{aligned} &3 - [6 - (-5 + 4) - 2] + 1 = \\ &= 3 - [6 - (-1) - 2] + 1 = \\ &= 3 - [6 + 1 - 2] + 1 = \\ &= 3 - \quad 5 + 1 \quad = -1 \end{aligned}$$

SEGUNDA FORMA

1. Se suprime en primer lugar el paréntesis.
2. Después se suprime el corchete:

$$\begin{aligned} &3 - [6 - (-5 + 4) - 2] + 1 = \\ &= 3 - [6 + 5 - 4 - 2] + 1 = \\ &= 3 - 6 - 5 + 4 + 2 + 1 = \\ &= (3 + 4 + 2 + 1) - (6 + 5) = \\ &= 10 - 11 = -1 \end{aligned}$$

1. Calcula:

a) $2 - 12 - 15 + 12 + 4 - 16 + 3 = (2 + 12 + 4 + 3) - (12 + 15 + 16) =$

b) $-8 + 7 - (-9) + (-4) + (-8)$

c) $(-40) + (-12) + 8 - 6$

2. Calcula de dos formas:

a) $-2 - (-6 + 4)$ c) $3 - (1 - 6)$ e) $9 - (4 - 2 - 5)$

b) $-5 - (9 - 2)$ d) $7 - (12 - 4 + 1)$ f) $7 - (-5 + 3 - 2)$

3. Calcula en las dos formas que se indica en esta página:

a) $7 - [9 - (4 - 13) + 2]$ c) $1 - [8 - (-3 + 6) - 5] + 4$

b) $5 - [6 - 2 - (1 - 8) - 3 + 6] + 5$ d) $1 - (5 - 3 + 2) - [5 - (6 - 3 + 1) - 2]$

4. Los productos también se escriben en forma simplificada.

Calcula de dos maneras:

a) $-3 \cdot (5 + 6)$ — Primera: $(-3) \cdot 5 + (-3) \cdot 6 = -15 - 18 = -33$; Segunda: $-3 \cdot 11 = -33$

b) $-6 \cdot (8 + 7)$ c) $6 \cdot (9 + 5)$ d) $2 \cdot (-6 + 2)$ e) $(-8 - 6) \cdot (-5)$

5. Calcula:

a) $2 \cdot (-6) + 4 \cdot (-2)$ c) $(-8) \cdot 6 - 5 \cdot 7$ e) $7 \cdot 3 - 8 \cdot (-2)$

b) $(-1) \cdot 2 - (-3) \cdot (-4)$ d) $7 - 3 \cdot (-8)$ f) $12 - 7 \cdot (-5)$

5. Divisibilidad en el conjunto de los números enteros. I

Múltiplos de un número.

EJEMPLO

-60 es múltiplo de $+15 \longrightarrow -60 = +\dot{15}$
porque $-60 = (+15) \cdot (-4) = +\dot{15}$

$$a = \dot{b} \longrightarrow b \cdot n; \quad n \in Z$$

Si cada número entero
$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, +1, +2, ...\}$
se multiplica por $+5$ se obtiene el conjunto de los múltiplos de $+5$, que se representa así: $\{+\dot{5}\}$:

$$\{+\dot{5}\} = \{..., -15, -10, -5, 0, +5, +10, +15, ...\}$$

Cada múltiplo de $+5$ es el producto de $+5$ por un número entero.

Así, $+40$ es múltiplo de $+5$ y de -5.

Del mismo modo, -40 es múltiplo de $+5$ y de -5.

También se dice que $+5$ y -5 son divisores de $+40$.
32 no es múltiplo de $+5$ porque no hay ningún número entero que multiplicado por $+5$ dé 32.

Un número entero a es múltiplo de otro número entero b si existe un número entero n tal que $a = b \cdot n$. Si esto ocurre, se dice también que a es divisible por b o que b es divisor de a.

Cómo se averigua si un número entero es divisible por otro.

EJEMPLO

$-36 = (-9) \cdot 4 \longrightarrow 36 : (-9) = 4$

$a = \dot{b} \longrightarrow$ a : b es cociente exacto

¿Es -21 divisible entre $+7$?

Como $-21 = (+7) \cdot (-3)$ resulta que la división $-21 : (+7) = -3$ es exacta.

Por eso: -21 es divisible por $+7$
y $+7$ es divisor de -21

Observa que la división $-21 : 7 = -3$ se puede hacer dividiendo primero los valores absolutos $21 : 7 = 3$ y poniendo después el signo $-$.

Un número entero a es divisible por otro número entero b si la división del valor absoluto de a por el valor absoluto de b es exacta.

1. **Escribe cinco múltiplos positivos y otros cinco negativos de $+3$.**

2. **Si $a = (+3) \cdot n$, entonces a es múltiplo de $+3$.**
   - ¿Es también **a** múltiplo de -3?
   - ¿Son los mismos los múltiplos de $+3$ y los de -3?

3. **Contesta:**
   - ¿Es $+6$ múltiplo de $+1$? ¿Y de -1?
   - ¿Es $+18$ múltiplo de -6? ¿Y de $+6$?

6. Divisibilidad en el conjunto de los números enteros. II

División exacta de enteros.

Si la división de enteros **a : b = c** es exacta se escribe también $\frac{a}{b} = c$.

Observa las siguientes divisiones:

1. Dividendo y divisor positivos:	**2. Dividendo y divisor negativos:**
$\frac{+6}{+3} = +2$, porque $(+3)\cdot(+2) = +6$ $\frac{\text{positivo}}{\text{positivo}} = \text{positivo}$	$\frac{-6}{-3} = +2$, porque $(-3)\cdot(+2) = -6$ $\frac{\text{negativo}}{\text{negativo}} = \text{positivo}$
3. Dividendo positivo y divisor negativo:	**4. Dividendo negativo y divisor positivo:**
$\frac{+6}{-3} = -2$, porque $(-3)\cdot(-2) = +6$ $\frac{\text{positivo}}{\text{negativo}} = \text{negativo}$	$\frac{-6}{+3} = -2$, porque $(+3)\cdot(-2) = -6$ $\frac{\text{negativo}}{\text{positivo}} = \text{negativo}$

Regla de los signos de la división.

REGLA DE LOS SIGNOS

+ entre + ⟹ +
− entre − ⟹ +
+ entre − ⟹ −
− entre + ⟹ −

En los cuatro casos anteriores el cociente se puede obtener dividiendo los valores absolutos:

$$\frac{6}{3} = 2$$

El signo viene dado por la **regla de los signos,** que es análoga a la regla de los signos de la multiplicación.

Para hallar el cociente exacto de dos enteros se dividen sus valores absolutos y al cociente se le pone el signo + o el signo − según que ambos números tengan igual o diferente signo.

1. Resuelve las siguientes divisiones exactas de números enteros:

a) $\frac{-40}{-4}$ c) $\frac{-15}{-3}$ e) $\frac{-32}{-4}$ g) $\frac{-21}{-3}$ i) $\frac{-60}{-12}$

b) $\frac{-18}{+6}$ d) $\frac{+15}{+3}$ f) $\frac{-48}{+12}$ h) $\frac{-75}{+5}$ j) $\frac{-90}{+15}$

2. En la división también se puede prescindir del signo +.

Calcula:

a) $-12 : 6$ c) $32 : -4$ e) $-15 : -15$ g) $-64 : -64$

b) $48 : -6$ d) $-26 : -13$ f) $8 : -8$ h) $64 : 64$

7. Divisibilidad en el conjunto de los números enteros. III

Criterios de divisibilidad.

Núm.	¿Es divisible por	Respuesta	Criterio
450	2?	Sí	Termina en 0
450	3?	Sí	$4+5+0=9=\dot{3}$
450	5?	Sí	Termina en 0
450	6?	Sí	$450=\dot{2}$ y $450=\dot{3}$
450	9?	Sí	$4+5+0=9=\dot{9}$
450	10?	Sí	Termina en 0

Como los valores absolutos de los números enteros son los números naturales, los criterios de divisibilidad entre enteros son los mismos que los criterios de divisibilidad para números naturales.

- **Un número es divisible por 10 si acaba en cero.**
- **Un número es divisible por 2 si acaba en cero o en cifra par.**
- **Un número es divisible por 5 si acaba en cero o en 5.**
- **Un número es divisible por 4 o por 25 si las dos últimas cifras forman un número divisible por 4 o por 25.**
- **Un número es divisible por 3 o por 9 si la suma de sus cifras es divisible por 3 o por 9, respectivamente.**
- **Un número es divisible por 6 si es divisible por 2 y por 3 a la vez.**

Divisores de un número.

$2 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 11 \ \ldots$
$-2 \quad -3 \quad -5 \quad -7 \quad -11 \ \ldots$

Son números primos, tienen cuatro divisores

$4 \quad 6 \quad 8 \quad 10 \ \ldots$
$-4 \quad -6 \quad -8 \quad -10 \ \ldots$

Son números compuestos, tienen más de cuatro divisores

DIVISORES DE —20 Y DE 20

A	1	2	4	×5
B	5	10	20	
C	−1	− 2	− 4	
D	−5	−10	−20	

Un número entero distinto de 0 y de 1 es primo si tiene únicamente cuatro divisores.

Así, 3 es primo, porque sus divisores son:

$$D(3) = \{1, -1, 3, -3\}$$

También -7 es primo, porque sus divisores son:

$$D(-7) = \{1, -1, 7, -7\}$$

En cambio, 6 es compuesto, porque tiene más de cuatro divisores:

$$D(6) = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$$

Observa cómo se hallan los divisores de -20.

1.° Se hallan los divisores naturales de 20:

$$20 = 2^2 \times 5$$

Para ello se escriben el 1 y las potencias sucesivas del primer factor primo ($2^1 = 2$; $2^2 = 4$). Así se obtiene la fila **A**.

Después se multiplican los números de esta fila por 5.

Así resulta la fila **B**.

2.° Se escriben los opuestos de los números de la fila **A** y de la fila **B**. Así resultan los divisores de las filas **C** y **D**.

Para hallar los divisores de un número entero se hallan los divisores del número natural que es su valor absoluto y se une este conjunto de números con el de sus opuestos.

8. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos enteros

MÁXIMO COMÚN DIVISOR DE 6 y −8

$D(6) = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$

$D(-8) = \{1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8\}$

m.c.d. $(6, -8) = 2$

Máximo común divisor.

Como en el caso de los números naturales, el máximo común divisor de dos números es el mayor de los divisores comunes.

Observa que m.c.d.$(6, -8) = 2$.

Por lo tanto, el cálculo del m.c.d. de dos o más enteros se hace como si fueran números naturales.

Calculemos el m.c.d. de 12 y −20:

$$12 = 2^2 \times 3$$
$$20 = 2^2 \times 5$$

m.c.d.$(12, -20)$ = m.c.d.$(12, 20) = 2^2 = 4$

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE −6 y 8

$M(-6) = \{6, -6, 12, -12, 18, -18, 24, -24, \ldots\}$

$M(8) = \{8, -8, 16, -16, 24, -24, \ldots\}$

m.c.m.$(-6, 8) = 24$

Mínimo común múltiplo.

Observa los conjuntos de múltiplos de **−6** y de **8**.

Ambos conjuntos son infinitos.

El menor entero positivo que es múltiplo común de ambos es el 24, y éste es, por definición, el mínimo común múltiplo.

m.c.m.$(-6, 8)$ = m.c.m.$(6, 8) = 24$

Por lo tanto, el mínimo común múltiplo de dos enteros se hace igual que si se tratara de números naturales.

Mínimo común múltiplo de dos números enteros es el menor entero positivo que sea múltiplo común de los dos.

−8 Y 9 SON NÚMEROS PRIMOS ENTRE SÍ

$D(-8) = \{1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8\}$

$D(9) = \{1, -1, 3, -3, 9, -9\}$

m.c.d.$(-8, 9) = 1$

Números primos entre sí.

Observa los divisores de **−8** y de **9**.

Los divisores comunes son 1 y −1; por esta razón −8 y 9 se llaman **números primos entre sí.**

Observa que m.c.d.$(-8, 9) = 1$, y m.c.m.$(-8, 9) = 72$.

Dos números enteros se llaman primos entre sí cuando sus únicos divisores comunes son 1 y −1. El máximo común divisor de dos números primos entre sí es 1, y su mínimo común múltiplo es el producto de sus valores absolutos.

1. Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de:

a) 30 y −35 b) −45 y 60 c) 80 y −40 d) −6 y 7 e) 8 y −6

2. Completa:

a) m.c.d.$(-60, 30)$ = m.c.d.$(60, 30)$ = b) m.c.m.$(-60, 30)$ = m.c.m.$(60, 30)$ =

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

1. Calcula:

① $10 : (-2)$ ② $-8 : 4$ ③ $-20 : 5$ ④ $-18 : 6$ ⑤ $45 : (-9)$ ⑥ $100 : -10$ ⑦ $72 : -8$ ⑧ $56 : -7$ ⑨ $600 : (-100)$ ⑩ $500 : (-5)$

2. Calcula:

① m.c.d.(6, 4) ② m.c.d.(−6, 4) ③ m.c.m.(6, 4) ④ m.c.m.(−6, 4) ⑤ m.c.d.(5, −6) ⑥ m.c.m.(5, −6) ⑦ m.c.d.(10, −20) ⑧ m.c.m.(10, −20)

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Escribe los conjuntos D(−12) y D(−30). Escribe el conjunto de divisores comunes de −12 y −30, es decir, D(−12) ∩ D(−30).

a) ¿Cuál es el mayor de estos divisores comunes?

b) ¿Cuál es el m.c.d.(−12, −30)?

2. Indica cuáles de los siguientes números son divisibles por 2, cuáles por 3, cuáles por 5 y cuáles por 9:

120 −360 −72 85 −104 108

3. Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de los siguientes pares de números:

a) 56 y −32 b) −12 y −15 c) −60 y 80 d) 90 y −105 e) 12 y −13 f) 8 y −72 g) −60 y −40 h) 60 y 40

4. Calcula:

a) $5 \cdot (7 - 3)$ b) $9 \cdot (6 + 7)$ c) $8 \cdot (12 - 5)$ d) $-3 \cdot (-5 + 7)$ e) $3 \cdot (-6 + 9)$ f) $-2 \cdot (9 - 12)$

5. Comprueba que el conjunto de los múltiplos de 7 es igual al conjunto de los múltiplos de −7.

6. Simplifica las expresiones y calcula el resultado:

a) $-(-32) = 32$ b) $-(-7) =$ c) $-(+4) =$ d) $-4 - (-8) =$ e) $-5 - (+2) =$ f) $7 - (-2) - 5 =$ g) $2 - [-(7 - 2) + 1] - 4 =$ h) $3 - [-5 - (6 - 3) - 2] + 6 =$ i) $2 - [-4 - (9 + 5 - 3) + 2] - 8 =$

7. Pitágoras nació en el año 569 antes de Cristo y murió en el año 500 antes de Cristo.

¿A qué edad murió?

8. ¿Cuál es el valor que debe tener la letra **b** para que los siguientes números sean divisibles por 3?

a) −2**b**46 b) −301**b** c) **b**314 d) 413**b** e) 12**b**56

9. Un barco A sale de un puerto cada 30 días y otro barco B sale del mismo puerto cada 24 días. El 1 de mayo coinciden ambos barcos en el puerto.

¿Qué día volverán a coincidir?

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. En Holanda, una casa tiene 11 m de altura sobre la calle, la calle está a 2 m sobre la superficie del agua de un canal, al que bordea, y ésta se encuentra a 6 m bajo el nivel del mar.

a) ¿Qué altura sobre la casa alcanzaría el agua si se conectase el canal con el mar?

2. Al enchufar a la corriente un arcón congelador la temperatura desciende 2° centígrados cada 8 minutos. En el momento de enchufarlo el interior del arcón está a 16° centígrados.

a) ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar $-24°$?

b) ¿A qué temperatura se encontrará al cabo de dos horas de tenerlo enchufado?

3. Una conferencia de desarme internacional a la que asisten 72 norteamericanos y 48 rusos se celebra en una sala que dispone de 156 sillas distribuidas por filas de igual número de plazas. En la conferencia se pretende que cada fila ocupada lo sea enteramente y que no se mezclen en una misma fila los rusos y los americanos.

a) ¿Cuál es el número de sillas por fila para que el número de filas ocupadas sea mínimo?

b) ¿Cuántas filas ocuparía cada grupo? ¿Y si a última hora aparecen 3 americanos y 6 rusos más?

4. En un termómetro en el que aparecen señaladas las temperaturas 0°, $-48°$ y 60° centígrados, la diferencia entre dos señales consecutivas es siempre el mismo número de grados, que es entero y mayor que 1.

a) ¿De cuántas maneras distintas puede estar señalado el termómetro?

b) ¿En qué caso el número de señales es mínimo?

5. En un aeropuerto funcionan dos pistas, una de despegue y otra de aterrizaje. A las 9 de la mañana de un día se cuentan en el aeropuerto 17 aviones, de los cuales uno despega y otro aterriza. A partir de esa hora despega un avión cada 3 minutos y aterriza uno cada 4 minutos.

a) ¿A qué hora y por primera vez no hay ningún avión en el aeropuerto?

b) Hasta esta hora ¿cuándo se han utilizado las dos pistas simultáneamente?

c) ¿A qué hora deja de ser posible el despegue cada 3 minutos?

6. En las instrucciones de un coche se especifica que debe cambiarse el aceite del motor cada 7.500 km, el filtro de aire cada 15.000 km, el aceite de la caja de cambio cada 22.500 y las bujías cada 30.000 km.
Aproximadamente, cambiar el aceite del motor cuesta 1.500 ptas., el filtro del aire 2.000 ptas., el aceite de la caja de cambio 2.125 y las bujías 2.800 ptas.

a) ¿Cuál es el costo de todos los cambios recomendados desde 0 a 100.000 km?

b) ¿A qué número de kilómetros tiene lugar la revisión más costosa?

7. En la vertical de una ciudad y en distintas órbitas pasan tres satélites artificiales. Uno pasa cada 28 horas, otro cada 98 horas y el tercero cada 2 días.
El día 24-III-83, a las 10 h de la mañana, coincidieron los tres en la vertical de la ciudad.

a) ¿Cuándo vuelven a coincidir por primera vez?

b) ¿Cuántas vueltas a la Tierra da cada uno entre dos encuentros?

TEMA 5 POTENCIAS Y RAÍZ CUADRADA

1. Potencias de base entera y exponente natural. I

Potencia de base entera y exponente natural.

POTENCIA DE BASE ENTERA

Base	Exponente	Potencia
-5	3	$(-5)^3 = -125$
3	4	$(3)^4 = +81$

POTENCIAS DE EXPONENTES 0 Y 1

$(-5)^0 = 1$ $\quad$ $6^0 = 1$ $\quad$ $(-5)^1 = -5$ $\quad$ $6^1 = 6$

$a^0 = 1$ $\quad$ $a^1 = a$

Observa los siguientes productos de números enteros:

$(-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$ $\quad$ $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ $\quad$ $(-6) \cdot (-6)$

Estos productos de factores iguales se escriben, respectivamente, $(-5)^3$, 3^4, $(-6)^2$, y se llaman **potencias.**

En la potencia $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$, el factor que se repite, (-5), se llama **base**, y el número de veces que se repite, (3), se llama **exponente.**

- Las potencias de exponente 2 se llaman **cuadrados** y las potencias de exponente 3 se llaman **cubos.**
- Las potencias a^1 y a^0 no tienen ningún significado, porque no hay productos ni de un factor ni de cero factores, pero se conviene en que $a^0 = 1$ y $a^1 = a$.

Si a es un número entero y n un número natural distinto de 0 y 1, se llama potencia de base a y exponente n al producto de n factores iguales todos al número a:

$$a^n = a \cdot a \overset{(n \text{ veces})}{\ldots\ldots\ldots\ldots} a$$

1. Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16$ $\quad$ b) $(-3)^5$ $\quad$ c) $(-4)^3$ $\quad$ d) $(-5)^2$

2. Calcula las siguientes potencias y contesta:

a) 1^0, 1^1, 1^2, 1^3, 1^4, 1^5, $1^{1.000}$

b) ¿Cuánto valen todas las potencias de base 1?

3. Calcula y contesta:

$(-1)^0$, $(-1)^1$, $(-1)^2$, $(-1)^3$, $(-1)^4$, $(-1)^5$, $(-1)^6$, $(-1)^{10}$, $(-1)^{80}$, $(-1)^{83}$

- ¿Cuánto valen las potencias de base -1 y exponente par?
- ¿Cuánto valen las potencias de base -1 y exponente impar?

4. Si n es un número natural distinto de cero, calcula:

a) $(-1)^{2 \cdot n}$ $\quad$ b) $(-1)^{2 \cdot n+1}$

5. Recuerda cómo se elevan una fracción y un decimal a una potencia y calcula:

a) $(0{,}02)^3 = 0{,}000008$ $\quad$ c) $(0{,}03)^4$ $\quad$ e) $(0{,}005)^2$

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$ $\quad$ d) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ $\quad$ f) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$

2. Potencias de base entera y exponente natural. II

Signo de la potencia.

BASE POSITIVA O NATURAL

Exponente par: $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

Exponente impar: $(+2)^3 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +8$

BASE NEGATIVA

Exponente par: $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16$

Exponente impar: $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

PRIMER CASO

Cuando la base es un entero positivo o natural.

Observa el resultado de desarrollar las potencias $(+2)^3$ y 2^4 y sus signos.

En todos los casos el resultado es un número entero positivo o natural.

SEGUNDO CASO

Cuando la base es un número entero negativo.

Observa el resultado de desarrollar las potencias $(-2)^3$, $(-2)^4$ y sus signos.

Fíjate que:

- Cuando el exponente es par, la potencia es positiva.
- Cuando el exponente es impar, la potencia es negativa.

BASE	EXPONENTE	POTENCIA
+	cualquiera	+
−	par	+
	impar	−

El signo de las potencias de base entera es:

- **Si la base es positiva, la potencia es siempre positiva.**
- **Si la base es negativa y el exponente es par, la potencia es positiva.**
- **Si la base es negativa y el exponente es impar, la potencia es negativa.**

1. Contesta:

Si **x** es un número natural ¿qué signo tendrá el desarrollo de las siguientes potencias?

a) $(-x)^1$, $(-x)^2$, $(-x)^3$, $(-x)^4$, $(-x)^5$, $(-x)^6$, $(-x)^7$, $(-x)^{13}$, $(-x)^{20}$, $(-x)^{30}$

b) $(-x)^{10}$, $(-x)^{11}$, $(-x)^{100}$, $(-x)^{103}$

2. Una potencia de base negativa se puede escribir en forma de una potencia de base positiva.

EJEMPLO RESUELTO

Escribe:

a) $(-2)^3$ y b) $(-2)^4$ como potencias de base positiva.

a) $(-2)^3 = \underbrace{(-2) \cdot (-2)}_{+} \cdot (-2) = -2 \cdot 2 \cdot 2 = -2^3$. **La base es 2 y el exponente es 3.**

b) $(-2)^4 = \underbrace{(-2) \cdot (-2)}_{+} \cdot \underbrace{(-2) \cdot (-2)}_{+} = +2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$. **La base es 2 y el exponente es 4.**

Escribe como potencia de base positiva:

a) $(-3)^2$ b) $(-3)^3$ c) $(-3)^4$ d) $(-5)^2$ e) $(-5)^3$ f) $(-5)^4$ g) $(-5)^6$

3. Operaciones con potencias. I

Cómo se multiplican potencias de la misma base.

PRODUCTO DE POTENCIAS DE LA MISMA BASE

$$(-3)^3 \cdot (-3)^2 = (-3)^{3+2}$$

$$a^m \cdot a^p = a^{m+p}$$

Vamos a multiplicar estas potencias $(-3)^3$ y $(-3)^2$:

$$(-3)^3 \cdot (-3)^2 = \\ = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = (-3)^{3+2}$$

es decir:

$$(-3)^3 \cdot (-3)^2 = (-3)^{3+2}$$

Se observa que resulta otra potencia con la misma base (-3) y cuyo exponente **(5)** es igual a la suma de los exponentes $(3 + 2)$.

En general, si **a** es un número entero y **m** y **p** son números naturales:

$$a^m \cdot a^p = a^{m+p}$$

Para multiplicar potencias de la misma base se deja la misma base y se suman los exponentes.

Cómo se dividen potencias de la misma base.

COCIENTE DE POTENCIAS DE LA MISMA BASE

$$(-5)^6 : (-5)^2 = (-5)^{6-2}$$

$$a^m : a^p = a^{m-p}$$

Del producto $(-5)^4 \cdot (-5)^2 = (-5)^6$ se pueden obtener dos divisiones:

$$(-5)^4 \cdot (-5)^2 = (-5)^6$$

$$(-5)^6 : (-5)^2 = (-5)^4$$

$$(-5)^6 : (-5)^4 = (-5)^2$$

Observa que al dividir dos potencias de la misma base la potencia que resulta $(-5)^4$ tiene la misma base (-5) y el exponente **(4)** es la diferencia de los exponentes: $6 - 2 = 4$.

En general, $a^m : a^p = a^{m-p}$

Para dividir potencias de la misma base se deja la misma base y se restan los exponentes.

1. Escribe en forma de una sola potencia:

a) $(-2)^4 \cdot (-2)^5$
b) $(-6)^9 : (-6)^5$
c) $(-8)^4 \cdot (-8)^3$
d) $(-2)^2 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^4$
e) $(-3)^7 : (-3)^3$
f) $(-2)^5 \cdot (-2)^6$
g) $(-7)^{12} : (-7)^8$
h) $(-10)^3 : (-10)^2$
i) $a^7 : a^3$

2. Expresa el resultado en forma de potencia de base positiva:

a) $(-5)^7 : (-5)^4 = (-5)^3 = -5^3$
b) $(-3)^6 : (-3)^3$
c) $(-9)^4 : (-9)^2$
d) $(-9)^5 : (-9)^4$
e) $6^7 : (-6)^2$
f) $6^8 : (-6)^3$

3. Expresa cada uno de los resultados de la actividad 1 en forma de potencia de base positiva.

4. Operaciones con potencias. II

Cómo se eleva una potencia a otra potencia.

POTENCIA DE UNA POTENCIA

$$[(-2)^3]^4 = (-2)^{3\times 4}$$

$$(a^m)^p = a^{m\cdot p}$$

Vamos a elevar a 4 esta potencia: $(-2)^3$.

$$[(-2)^3]^4 = (-2)^3 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^3 =$$
$$= (-2)^{3+3+3+3} = (-2)^{3\times 4} = (-2)^{12}$$

En general, $(a^m)^p = a^{m\cdot p}$

Para elevar una potencia a otra potencia se deja la misma base y se multiplican los exponentes.

Cómo se eleva un producto a una potencia.

POTENCIA DE UN PRODUCTO

$$[(-3)\cdot 2\cdot (-5)]^3 = (-3)^3 \cdot 2^3 \cdot (-5)^3$$

$$(a\cdot b\cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$$

Vamos a elevar al cubo este producto: $(-3)\cdot 2\cdot (-5)$.

$$[(-3)\cdot 2\cdot (-5)]^3 =$$
$$= (-3)\cdot 2\cdot (-5)\cdot (-3)\cdot 2\cdot (-5)\cdot (-3)\cdot 2\cdot (-5) =$$
$$= (-3)\cdot (-3)\cdot (-3)\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot (-5)\cdot (-5)\cdot (-5) =$$
$$= (-3)^3 \cdot 2^3 \cdot (-5)^3$$

En general, $(a\cdot b\cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$

Para elevar un producto a una potencia se elevan cada uno de los factores a dicha potencia.

1. Escribe en forma de una sola potencia:

a) $[(-2)^3]^5$ c) $[(-5)^2]^4$ e) $(2^4)^5$ g) $[(-2)^1]^6$ i) $(3^{10})^2$

b) $[(-3)^2]^3$ d) $[(-6)^3]^3$ f) $(3^4)^2$ h) $[(-2)^2]^6$ j) $(3^2)^{10}$

2. Expresa en forma de producto de varias potencias:

a) $[(-3)\cdot(-2)\cdot(-5)]^4$ c) $(2\cdot 7\cdot 6)^3$ e) $[(-2)\cdot(-3)\cdot(-6)]^3$

b) $[(-2)\cdot 5\cdot(-6)]^2$ d) $(x\cdot y\cdot z)^4$ f) $[(-6)\cdot(-8)\cdot 4]^5$

3. Expresa cada uno de los resultados de las actividades 1 y 2 en forma de potencia de base positiva.

4. Expresa en forma de una sola potencia:

a) $a^4\cdot b^4\cdot c^4 = (a\cdot b\cdot c)^4$ c) $a^5\cdot b^5$ e) $2^6\cdot 4^6\cdot 5^6$ g) $(-3)^6\cdot(-10)^6$

b) $(-2)^3\cdot(-3)^3\cdot(-4)^3$ d) $(-2)^4\cdot 3^4$ f) $x^8\cdot y^8\cdot z^8$ h) $(-5)^4\cdot(-2)^4$

5. Si x es un número entero, calcula:

a) $x^6\cdot x^3\cdot x^2$ c) $x^5 : x^2$ e) $x^4 : x^2$ g) $x^8 : x^6$

b) $x^5\cdot x^2\cdot x$ d) $x^5 : x$ f) $x^4 : x^4$ h) $x^8 : x$

5. *Raíz cuadrada de un número entero*

Número entero negativo	Número entero positivo	Se elevan al cuadrado	Cuadrados perfectos
-1	1	$(-1)^2 = 1^2 =$	**1**
-2	2	$(-2)^2 = 2^2 =$	**4**
-3	3	$(-3)^2 = 3^2 =$	**9**
-4	4	$(-4)^2 = 4^2 =$	**16**
-5	5	$(-5)^2 = 5^2 =$	**25**
-6	6	$(-6)^2 = 6^2 =$	**36**
-7	7	$(-7)^2 = 7^2 =$	**49**
-8	8	$(-8)^2 = 8^2 =$	**64**
-9	9	$(-9)^2 = 9^2 =$	**81**
-10	10	$(-10)^2 = 10^2 =$	**100**

$\sqrt{25} = \pm 5$ ← Raíces cuadradas

Radicando

Cuando un número entero se eleva a la potencia 2, es decir, al cuadrado, se obtiene otro número que se llama **cuadrado perfecto.**

Observa que el cuadrado de un número entero, por ejemplo 5, es igual al cuadrado de su opuesto:

$$5^2 = (-5)^2 = 25$$

El cuadrado perfecto 25 procede de elevar al cuadrado -5 y 5.

En general, todo cuadrado perfecto, salvo el cero, procede de elevar al cuadrado dos enteros opuestos.

Por ser $(+5)^2 = 25$ se dice que $+5$ es una raíz cuadrada de 25.

Por ser $(-5)^2 = 25$ se dice que -5 es otra raíz cuadrada de 25. Se escribe $\sqrt{25} = \begin{cases} +5 \\ -5 \end{cases}$ o bien $\sqrt{25} = \pm 5$.

En general, si $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}$, entonces **a** es una raíz cuadrada de **b**.

Como $(-\mathbf{a})^2 = \mathbf{b}$, resulta que $-\mathbf{a}$ es otra raíz cuadrada y se escribe $\sqrt{\mathbf{b}} = \pm\mathbf{a}$.

Como el cuadrado de un número entero es siempre positivo, resulta que los números enteros negativos no tienen raíz cuadrada.

Se llama raíz cuadrada de un número b a otro número a tal que elevado al cuadrado dé b.

1. Completa en tu cuaderno:

a) Como $6^2 = 36$ y $(-6)^2 = 36 \rightarrow \sqrt{36} = \pm 6$.

b) Como $7^2 = 49$ y $(-7)^2 = 49 \rightarrow \sqrt{49} =$

c) Como $9^2 = 81$ y $(-9)^2 = 81 \rightarrow \sqrt{81} =$

2. Contesta:

a) ¿Hay algún número que elevado al cuadrado dé -25? ¿Existe $\sqrt{-25}$?

b) ¿Hay algún número que elevado al cuadrado dé -36? ¿Existe $\sqrt{-36}$?

c) ¿Hay algún número que elevado al cuadrado dé un número negativo?

3. Calcula:

a) $\sqrt{1}$ c) $\sqrt{9}$ e) $\sqrt{25}$ g) $\sqrt{49}$ i) $\sqrt{81}$

b) $\sqrt{4}$ d) $\sqrt{16}$ f) $\sqrt{36}$ h) $\sqrt{64}$ j) $\sqrt{100}$

4. Observa el ejercicio resuelto y completa:

a) $\begin{array}{r|l} \sqrt{14} & 3 \\ -9 & \\ \hline 5 & \end{array}$ b) $\sqrt{20}$ c) $\sqrt{39}$ d) $\sqrt{50}$ e) $\sqrt{70}$ f) $\sqrt{90}$

6. Raíz cuadrada exacta y entera. Cálculo de la raíz cuadrada

Ⓐ **RAÍZ CUADRADA EXACTA**

$\sqrt{81} = 9$ **porque** $9^2 = 81$

Ⓑ **RAÍZ CUADRADA ENTERA POR DEFECTO**

$\sqrt{52}$ | 7 ← Raíz por defecto
-49 |
3 ← Resto por defecto

Ⓒ **RAÍZ CUADRADA ENTERA POR EXCESO**

$\sqrt{52}$ | 8 ← Raíz por exceso
64 |
12 ← Resto por exceso

Raíz cuadrada exacta y raíz cuadrada entera.

De ahora en adelante sólo consideraremos la raíz cuadrada positiva de los números.

Dado un número entero positivo, pueden ocurrir dos casos:

Ⓐ Que el número sea un cuadrado perfecto, en cuyo caso tiene raíz cuadrada exacta. Así, 81 tiene raíz cuadrada exacta: $\sqrt{81} = 9$.

Ⓑ y Ⓒ Que el número no sea cuadrado perfecto, en cuyo caso estará entre dos cuadrados perfectos consecutivos.

Así 52 no es cuadrado perfecto y no tiene raíz cuadrada exacta. Pero 52 está comprendido entre dos cuadrados perfectos: 49 y 64 $\quad 49 < 52 < 64$

Si se compara 52 con el cuadrado perfecto inferior a 52, que es 49, se obtiene la raíz cuadrada por defecto, y si se compara 52 con 64, se obtiene la raíz cuadrada entera por exceso.

Cálculo de la raíz cuadrada.

Tanto para hallar la raíz cuadrada exacta como para hallar la raíz cuadrada entera se procede así:

PRIMER PASO

$\sqrt{11.65}$

Se separan en el número, de derecha a izquierda, grupos de dos cifras.

El primer grupo de la izquierda puede tener una o dos cifras.

$\sqrt{11.65}$

SEGUNDO PASO

$\sqrt{11.65}$ | 3
$-\ 9$ |
2

Se halla la raíz cuadrada del grupo de la izquierda. El número cuyo cuadrado se acerca más a 11 es 3: $3^2 = 9$. Por tanto, la primera cifra de la raíz es 3, y se calcula la diferencia: $11 - 9 = 2$.

$\sqrt{11}$ | 3
$-\ 9$ |
2

TERCER PASO

$\sqrt{11.65}$ | 3
$-\ 9$ | 64
26.5

A la derecha del resto (2) se baja el grupo siguiente de cifras (65), y debajo de la raíz hallada (3) se escribe su doble (6).

De 265 se separa la cifra de la derecha (5), y al número que queda a la izquierda (26) se le divide entre 6, doble de la raíz hallada.

El cociente (4) se pone a continuación de 6 y se forma el número 64.

$\sqrt{11}$ | 3
$-\ 9$ | 6
26.5
26 | 6
4

CUARTO PASO

$\sqrt{11.65}$ | 34
$-\ 9$ | $64 \times 4 = 256$
26.5
$-\ 25.6$
9

El número 64 se multiplica por 4 y da 256. Como 256 es menor que 265, la cifra 4 vale y se puede pasar a la raíz.

El resto es $265 - 256 = 9$.

$64 \times 4 = 256$

7. Raíz cuadrada exacta de números racionales positivos

Cómo se halla la raíz cuadrada exacta de un decimal.

RAÍZ CUADRADA EXACTA DE DECIMALES

Cuadrados perfectos

$(0{,}5)^2 \longrightarrow (0{,}5) \cdot (0{,}5) \longrightarrow 0{,}25$

$(0{,}12)^2 \longrightarrow (0{,}12) \cdot (0{,}12) \longrightarrow 0{,}0144$

$(0{,}54)^2 \longrightarrow (0{,}54) \cdot (0{,}54) \longrightarrow 0{,}2916$

Radicandos cuadrados perfectos

Raíces con la mitad de cifras decimales que el radicando

$\sqrt{0{,}25} \longrightarrow 0{,}5$

$\sqrt{0{,}0144} \longrightarrow 0{,}12$

$\sqrt{0{,}2916} \longrightarrow 0{,}54$

Observa que el cuadrado de un número decimal tiene siempre un número par de cifras decimales.

Puesto que $0{,}54^2 = 0{,}2916$, diremos que la raíz cuadrada de 0,2916 es 0,54. Como en el caso de números naturales, se escribe:

$$\sqrt{0{,}2916} = 0{,}54$$

Radicando — Raíz

De la misma manera:

$$\sqrt{0{,}25} = 0{,}5; \quad \sqrt{0{,}04} = 0{,}2; \quad \sqrt{0{,}0144} = 0{,}12$$

Se observa en todos los casos que el número de cifras decimales de la raíz es la mitad de las cifras decimales del radicando.

Vamos a hallar la raíz cuadrada de 12,25. Como tiene dos cifras decimales, la raíz tendrá una sola cifra decimal. Por tanto, podemos calcular la raíz como si fuera un entero y separar después una cifra decimal.

Como $\sqrt{1225} = 35$, resulta que $\sqrt{12{,}25} = 3{,}5$.

Cómo se halla la raíz cuadrada exacta de una fracción.

RAÍZ CUADRADA EXACTA DE FRACCIONES

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$$

Si los dos términos de la fracción son cuadrados perfectos, se calcula la raíz cuadrada de cada uno de ellos.

Así: $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$

1. Calcula las raíces cuadradas exactas de los siguientes números decimales:

a) 0,25	d) 0,04	g) 0,81	j) 12,96	m) 2,56
b) 0,36	e) 0,09	h) 3,61	k) 0,0169	n) 0,1225
c) 0,01	f) 0,49	i) 3,24	l) 2,25	o) 0,3025

2. Calcula las raíces cuadradas exactas siguientes:

a) $\sqrt{\frac{25}{36}}$ b) $\sqrt{\frac{1}{16}}$ c) $\sqrt{\frac{1}{81}}$ d) $\sqrt{\frac{81}{4}}$ e) $\sqrt{\frac{9}{49}}$

8. Raíz cuadrada aproximada de números racionales. I

Cómo se halla la raíz cuadrada aproximada de un decimal.

RAÍZ CUADRADA APROXIMADA

PRIMER CASO

Número par de cifras decimales

Para calcular $\sqrt{7{,}93}$ con 1 cifra decimal:

① **Se calcula la raíz cuadrada entera de 793:**

$$\sqrt{793} = 28$$

② **Como $\sqrt{793} = 28 \rightarrow \sqrt{7{,}93} = 2{,}8$**

SEGUNDO CASO

Número impar de cifras decimales

Para calcular $\sqrt{0{,}7}$ con 2 cifras decimales:

① **Se calcula la raíz cuadra entera de 7.000:**

$$\sqrt{7.000} = 83$$

② **Como $\sqrt{7.000} = 83 \rightarrow \sqrt{0{,}7000} = 0{,}83$**

PRIMER CASO

Cuando el decimal tiene un número par de cifras decimales.

¿Cuál es la raíz cuadrada aproximada con una sola cifra decimal del número 7,93?

① Observa que la raíz entera de 793 es 28, es decir:

$$28^2 = 784 < 793, \text{ luego } 2{,}8^2 = 7{,}84 < 7{,}93$$

② Por lo tanto, 2,8 es la raíz cuadrada aproximada con una sola cifra decimal de 7,93, es decir, $\sqrt{7{,}93} \rightarrow 2{,}8$.

SEGUNDO CASO

Cuando el decimal tiene un número impar de cifras decimales.

¿Cuál es la raíz cuadrada aproximada con dos cifras decimales del número 0,7?

Si la raíz ha de tener dos cifras decimales, el radicando debe tener cuatro cifras decimales.

① Por esta razón escribiremos tres ceros a la derecha del decimal dado: 0,7 = 0,7000. (Recuerda que los ceros a la derecha de un decimal no alteran su valor.)

Ahora se halla la raíz cuadrada entera de 7.000, que es 83, es decir, $83^2 = 6.889 < 7.000$.

② Luego $0{,}83^2 = 0{,}6889 < 0{,}7000$. Por lo tanto, 0,83 es la raíz cuadrada aproximada con dos cifras decimales de 0,7.

Para hallar la raíz cuadrada aproximada con una, dos o más cifras decimales de un número decimal:

- **Primero, se escribe el número decimal dado con el doble de cifras decimales que el número de cifras que deseamos tenga la raíz. Si fuera necesario, al número dado se le agregan ceros.**
- **Después, prescindiendo de la coma, se halla la raíz cuadrada del número entero que resulte, y en la raíz obtenida se separa con una coma el número de cifras decimales deseado.**

1. Calcula las raíces aproximadas con dos cifras decimales de:

a) 0,8	e) 0,9	i) 1,45	m) 0,5	q) 0,34
b) 0,7	f) 0,27	j) 2,58	n) 0,6	r) 3,46
c) 0,4	g) 0,32	k) 0,1	o) 0,42	s) 2,48
d) 0,3	h) 0,75	l) 0,2	p) 0,53	t) 1,27

9. Raíz cuadrada aproximada de números racionales. II

Cómo se halla la raíz cuadrada aproximada de una fracción.

RAÍZ CUADRADA APROXIMADA DE UNA FRACCIÓN

Para calcular $\sqrt{\frac{2}{5}}$ con dos decimales:

① **Se reduce $\frac{2}{5}$ a decimal: $\frac{2}{5} = 0{,}4$**

② **Se calcula $\sqrt{0{,}4} = \sqrt{0{,}4000} = 0{,}63$**

No siempre existe una fracción que sea raíz cuadrada exacta de una fracción dada. Por ejemplo, no hay ninguna fracción que sea raíz cuadrada exacta de $\frac{2}{5}$

En estos casos la fracción se puede convertir en decimal y se halla entonces la raíz aproximada de la fracción dada.

Cómo se halla la raíz cuadrada aproximada de un entero.

RAÍZ CUADRADA APROXIMADA DE UN ENTERO

Para calcular $\sqrt{3}$ con dos decimales:

① **Se calcula la raíz cuadrada entera de 30.000:**

$$\sqrt{30.000} = 173$$

② **Se separan dos cifras decimales de la raíz entera obtenida:**

$$\sqrt{3} = \sqrt{3{,}0000} = 1{,}73$$

La regla para hallar la raíz cuadrada aproximada de un número decimal es válida también para hallar la raíz cuadrada aproximada de un entero.

Ejemplo ¿Cuál es la raíz cuadrada de 3 con dos cifras decimales?

Se escribe el 3 con cuatro decimales:

$3 = 3{,}0000$ y se calcula $\sqrt{30000}$.

Como la raíz cuadrada entera de 30.000 es 173, resulta que la raíz cuadrada aproximada de 3,0000 es 1,73, es decir:

$$\sqrt{3} = \sqrt{3{,}0000} = 1{,}73$$

1. Calcula las raíces aproximadas de las fracciones siguientes con una cifra decimal:

a) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{7}{5}$ e) $\frac{13}{4}$ g) $\frac{7}{4}$ i) $\frac{5}{9}$

b) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{8}{5}$ f) $\frac{12}{5}$ h) $\frac{4}{3}$ j) $\frac{5}{6}$

2. Calcula las raíces aproximadas con dos cifras decimales de los enteros siguientes:

a) 2 d) 6 g) 10 j) 24 m) 40 p) 140 s) 300

b) 3 e) 7 h) 12 k) 35 n) 50 q) 180 t) 500

c) 5 f) 8 i) 13 l) 77 o) 120 r) 200

3. Calcula las siguientes raíces con dos decimales:

a) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ c) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ e) $\sqrt{\frac{11}{4}}$ g) $\sqrt{1.500}$ i) $\sqrt{4.000}$

b) $\sqrt{\frac{1}{5}}$ d) $\sqrt{\frac{1}{6}}$ f) $\sqrt{\frac{18}{25}}$ h) $\sqrt{3.000}$ j) $\sqrt{6.000}$

Actividades

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

1. Calcula:

a) 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2 b) 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^3, 10^3

2. Calcula la raíz positiva de:

$\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{36}$, $\sqrt{49}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt{81}$, $\sqrt{100}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula los cuadrados de los quince primeros números negativos.

2. Calcula las cuartas potencias de -3, -2, -5, 3, 2, 5.

3. Calcula:

a) Las seis primeras potencias de cero.
b) Las seis primeras potencias de 1.
c) Las seis primeras potencias de -1.

4. Calcula el resultado de:

a) $2 \cdot (-3)^2$ c) $-1 \cdot (-3)^2$ e) $-2 \cdot (-3)^2$ g) $-5 \cdot (-5)^2$
b) $3 \cdot (-2)^2$ d) $-1 \cdot (-2)^3$ f) $2 \cdot (-3)^2$ h) $-2 \cdot (-2)^3$

5. Escribe como potencias de base positiva:

a) $(-3)^2$ c) $(-5)^2$ e) $(-7)^2$ g) $(-6)^2$ i) $(-2)^2$ k) $(-2)^6$
b) $(-3)^3$ d) $(-5)^3$ f) $(-7)^3$ h) $(-6)^3$ j) $(-2)^5$ l) $(-2)^7$

6. Escribe el resultado en forma de potencia de base positiva:

a) $(-5)^8 : (-5)^5$ c) $(-20)^5 : (-20)^3$ e) $(-6)^2 \cdot 6^3$ g) $(-2)^5 \cdot 2^3$
b) $(-10)^5 : (-10)^3$ d) $6^9 : (-6)^5$ f) $(-3)^4 \cdot 3^2$ h) $(-2)^6 \cdot 2^2$

7. Expresa en forma de una sola potencia:

a) $\mathbf{m^2 \cdot p^2 \cdot q^2}$ c) $\mathbf{(m^2)^3}$ e) $\mathbf{(a^p)^q}$ g) $2^5 \cdot 3^5 \cdot 4^5$
b) $\mathbf{m^4 : m}$ d) $\mathbf{(m^5)^2}$ f) $\mathbf{(a^m)^h}$ h) $\mathbf{x^6 \cdot y^6 \cdot z^6}$

8. Calcula la raíz cuadrada exacta positiva de:

a) 144 c) 169 e) 900 g) 576 i) 289 k) 1.296
b) 361 d) 400 f) 10.000 h) 441 j) 529 l) 1.156

9. Halla la raíz cuadrada entera por defecto de:

a) 200 b) 300 c) 500 d) 600 e) 700 f) 800 g) 850

TEMA 6 EXPRESIONES ALGEBRAICAS. IGUALDADES NOTABLES

1. Lenguaje algebraico

Uso de las letras.

Si a un número entero se le suma su doble y el resultado se divide por 3 ¿qué número resulta?

Observa cómo han hecho el problema Pablo y Ana.

- Pablo elige un número entero **(5)**, le suma su doble **(10)** y el resultado **(15)** lo divide por **3.** Al final le resulta **5.**
- Ana designa por **x** un número entero cualquiera, le suma su doble **(2 · x)** y el resultado **(3 · x)** lo divide por **3.** Al final le resulta **x.**

El resultado de Ana es más general que el de Pablo porque el resultado de Ana vale para cualquier número entero.

Cuando en las operaciones se utilizan números solamente se dice que se usa un **lenguaje numérico.**

Cuando en las operaciones se utilizan números y letras se dice que se usa un **lenguaje algebraico.**

1. Expresa utilizando letras:

a) El valor de **x** kg de naranjas a 80 ptas. el kg → $80 \cdot x$.

b) El valor de **y** kg de mandarinas a 90 ptas. el kg → ...

c) El valor de los **x** kg de naranjas y de los **y** kg de mandarinas de a) y b) → ...

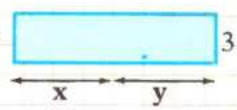
d) El valor de **a** metros de cinta a 20 ptas. el metro → ...

2. Expresa el área de los siguientes rectángulos:

a) **A** = ...

b) **A** = ...

c) **A** = ...

d)  **A** = ...

Para expresar el área del primer rectángulo escribiremos $2 \cdot x$ en lugar de $x \cdot 2$.

3. Escribe utilizando letras:

a) El doble de **x** → $2 \cdot x$

b) El triple de **y** → ...

c) El doble de **x** más el triple de **y** → ...

d) El triple de **x** más el cuadrado de **y** → ...

4. Expresa:

a) Que la suma de **x** e **y** es 10.

b) Que el producto de **x** e **y** es 24.

c) Que el cuadrado de **x** es 16.

d) Que el doble de **x** menos 5 es igual a 17.

Actividades

1. Si **x**, **y**, **z** son tres números enteros, expresa con ellos:

a) La propiedad conmutativa de la suma y la del producto.

b) La propiedad asociativa de la suma y la del producto.

c) La propiedad distributiva respecto de la adición y respecto de la sustracción:

① $x \cdot (y + z) =$ ② $x \cdot (y - z) =$

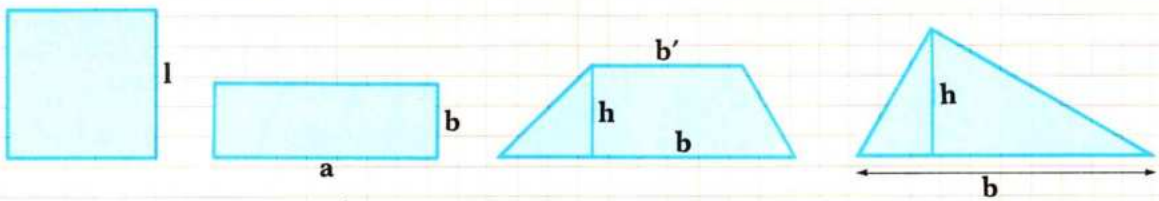
d) El cuadrado de **z**.

e) El cubo de **y**.

f) El cuadrado de **x** más el cubo de **y**.

g) El cuadrado de **x** más el cuadrado de **y** más el cuadrado de **z**.

2. Expresa con las letras indicadas el área de las siguientes figuras:



3. Expresa:

a) Qué el número **x** es 3 unidades mayor que **y** → $x = y + 3$.

b) Que el número **x** es 5 veces el número **y**.

c) Que el número **x** es doble del número **y**.

d) Que el triple de **x** es igual al doble de **y**.

e) Que el doble de **a** menos 1 es igual al número **b**.

f) Que **x** es múltiplo de **y** → $x = \dot{y}$.

4. Observa estas divisiones:

$$\begin{array}{r|l} 50 & 8 \\ 2 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} a & b \\ r & c \end{array}$$

Expresa en ambas divisiones que:

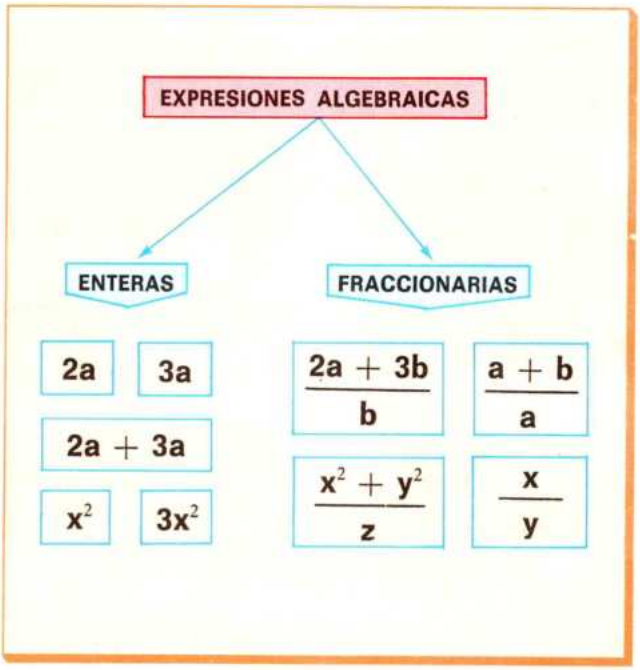
dividendo = divisor × cociente + resto, y que resto < divisor.

5. Expresa usando signos:

Usando palabras	Usando signos
Cinco, multiplicado por **n** más tres.	$5 \cdot (n + 3)$
Seis multiplicado por ocho, menos **n**.	
El doble de **x**, más uno es quince.	$2 \cdot x + 1 = 15$
El triple de **x**, menos uno es veintiséis.	
El cuadrado de **x** es igual a su doble.	
Cuatro multiplicado por la suma de **x** e **y** es setenta y dos.	
El triple de **x**, menos ocho es igual a diez.	

2. Expresiones algebraicas. Valor numérico

Expresiones algebraicas enteras y expresiones algebraicas fraccionarias.



Si **a** y **b** son números enteros distintos de 0, entonces:

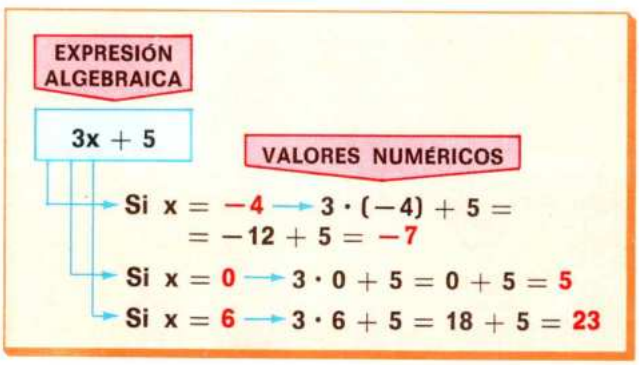
- El doble de **a** se escribe $2 \cdot a$, o bien $2a$.
  Se lee: «dos multiplicado por **a**», o bien «dos **a**».
- El triple de **a** se escribe $3 \cdot a$, o bien $3a$.
- El doble de **a** más el triple de **a** se escribe $2a + 3a$.
- El cociente de la suma anterior $(2a + 3a)$ entre **b** se escribe $\frac{2a + 3a}{b}$

Las expresiones $2a$, $3a$, $2a + 3a$, $\frac{2a + 3a}{b}$, etc., son combinaciones de números y letras separadas por los signos de las operaciones aritméticas. Estas expresiones se llaman **expresiones algebraicas.**

Las expresiones algebraicas en las que las letras están sometidas solamente a las operaciones de sumar, restar y multiplicar ($+$, $-$ y $\times$) se llaman **expresiones algebraicas enteras,** y si hay alguna letra como denominador o divisor se llaman **expresiones algebraicas fraccionarias.**

Una expresión algebraica es un conjunto de números y de letras separados por los signos de las operaciones aritméticas.
Una expresión algebraica es entera cuando las letras están sometidas solamente a las operaciones de sumar, restar y multiplicar ($+$, $-$ y $\times$).

Valor numérico de una expresión algebraica.



Considera la expresión algebraica $3x + 5$, en la que la letra **x** representa un número entero.

El valor de esta expresión depende del valor que se dé a la letra **x.**

- Si a **x** se le da el valor -4 → $3x + 5$ vale -7.
- Si a **x** se le da el valor 0 → $3x + 5$ vale 5.
- Si a **x** se le da el valor 6 → $3x + 5$ vale 23.

1. **Calcula en cada caso el valor de la expresión algebraica:**

   a) $3x - 5$ para $x = 2$
   b) $5x - 8$ si $x = -1$
   c) $4x + 3$ si $x = 6$
   d) $x^2 + 1$ para $x = -1$
   e) $x^3 + 1$ para $x = 1$
   f) $5x - 2$ para $x = -4$

2. **De las siguientes expresiones, indica las que son enteras:**

   a) $\frac{2x + y}{z}$
   b) $3x + y$
   c) $5x^2 + 2$
   d) $6x^3 - 1$

3. Monomios semejantes

MONOMIOS	POLINOMIOS
$2x$	$3x^2 + 2x + 1$
$-3x$	$3x^2 + 2x$
$5 \cdot a \cdot b$	$3x + 1$

Términos de una expresión algebraica entera.

Observa las siguientes expresiones algebraicas enteras:

$2x$ | $(-3)\,x^2$ | $5ab$ | $3x^2 + 2x$ | $a + b - 1$ | $3x + 1$

- En las tres primeras, las letras están sometidas solamente a la operación de multiplicar y se llaman **expresiones monomias** o **monomios.**
- En las tres últimas aparecen adiciones y sustracciones y se llaman **sumas algebraicas** o **polinomios.** Cada sumando es un término del polinomio.

MONOMIOS SEMEJANTES	MONOMIOS NO SEMEJANTES
$2x,\ -3x$	$2x;\ 2a$
$3x^2,\ -5x^2$	$3x^2;\ -2x$
$2a,\ 3a$	$4a;\ 2y$

SUMA DE MONOMIOS SEMEJANTES

$6x^2 + 8x^2 = 14x^2$

$3x + 2x = 5x$

$2a + 3a = 5a$

Monomios semejantes.

Los monomios $3x^2$ y $5x^2$ tienen la misma letra elevada a los mismos exponentes y se llaman **monomios semejantes.**

Los monomios $5x$ y $3y$ no son semejantes.

Los monomios $6x$ y $4x^2$ tampoco son semejantes.

Los monomios semejantes se pueden sumar:

$$3x + 2x = x + x + x + x + x = 5x$$

$$6x^2 + 8x^2 = 14x^2$$

Cuando en un polinomio aparecen monomios semejantes se puede simplificar.

Ejemplo $3x^2 + 2x + 6x^2 - 5x + 1 = 9x^2 - 3x + 1$

1. Calcula:

a) $5x + 3x$ c) $8x - 3x$ e) $3x^2 + 12x^2$ g) $7x^3 - 2x^3$

b) $6x + 9x$ d) $9x - 4x$ f) $-8x^2 + 6x^2$ h) $11x^4 - 3x^4$

2. Simplifica los monomios o términos semejantes en los siguientes polinomios:

a) $6x + 2x + x^2 + 1$ c) $4x + 6 + 2x + x - 1$ e) $3ab + 2ab$

b) $5x^3 - 6x^2 + 2x^2 - 3$ d) $3x + 5 + 8x + 2$ f) $ab + ab$

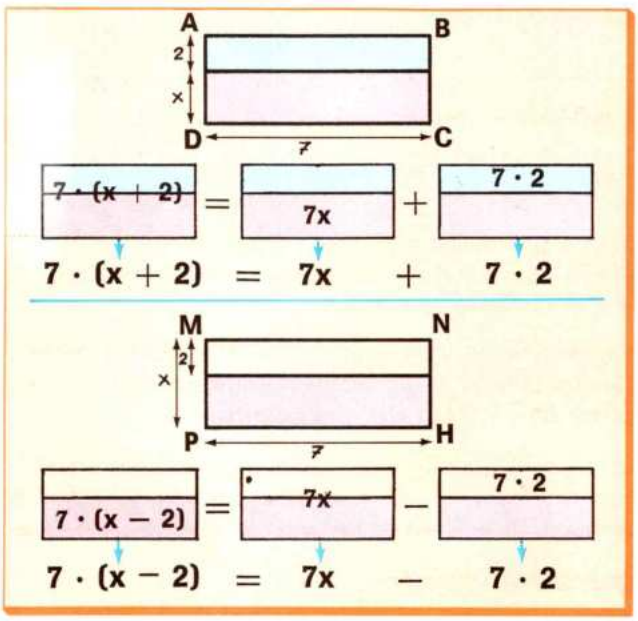
3. Calcula:

a) $3 \cdot x \cdot (-2) \cdot x^4 = -6x^5$ c) $3 \cdot x \cdot 2 \cdot x^2 \cdot 5 =$ e) $4x^2 \cdot 5x^2 \cdot 6x =$

b) $2 \cdot x \cdot (-5) \cdot x^3 =$ d) $6x^3 \cdot 2x \cdot 3 =$ f) $3x^2 \cdot (-1) \cdot x \cdot 2x =$

4. Operaciones con expresiones algebraicas sencillas

Aplicaciones de la propiedad distributiva.



Observa la figura.

El área del rectángulo **ABCD** es $7 \cdot (x + 2)$.
El área del rectángulo rojo es $7 \cdot x$.
El área del rectángulo azul es $7 \cdot 2$.

Observa que:

Área rectángulo ABCD	=	Área parte roja	+	Área parte azul
$7 \cdot (x+2)$	=	$7 \cdot x$	+	$7 \cdot 2$

Ésta es la propiedad distributiva, que permite transformar un producto en sumas o en restas.

Del mismo modo, en el rectángulo **MNHP** resulta:

Área rectángulo rojo	=	Área rectángulo MNHP	−	Área rectángulo blanco
$7 \cdot (x-2)$	=	$7 \cdot x$	−	$7 \cdot 2$

Sacar factor común.

Factor común

$$7 \cdot x + 7 \cdot 2 = 7 \cdot (x + 2)$$
$$7 \cdot x - 7 \cdot 2 = 7 \cdot (x - 2)$$

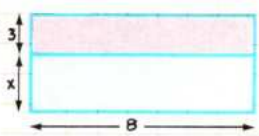
Factor común

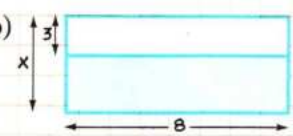
La propiedad distributiva permite también transformar sumas o restas en productos. Por ejemplo, las igualdades anteriores se pueden escribir de esta forma:

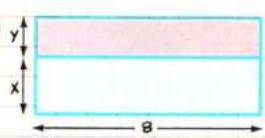
$$7 \cdot x + 7 \cdot 2 = 7 \cdot (x + 2)$$
$$7 \cdot x - 7 \cdot 2 = 7 \cdot (x - 2)$$

Entonces se dice que se ha sacado el factor común 7.

1. Escribe y desarrolla los productos representados por la parte coloreada de estos gráficos:

a) 

b) 

c) 

2. Desarrolla los siguientes productos aplicando la propiedad distributiva:

a) $(4 + x) \cdot 5$
b) $(2 + x) \cdot x$
c) $(x + 2x^3) \cdot x = x \cdot x + 2x^3 \cdot x = x^2 + 2x^4$
d) $(x - 5x^2) \cdot 4x$
e) $6 \cdot (x^2 + 2x)$
f) $-8 \cdot (x - 3)$

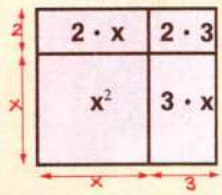
3. Saca el factor común:

a) $2x + 2y$
b) $4x + 4y$
c) $x + 5xy + x^2 = x \cdot (1 + 5y + x)$
d) $x + 2xy + x^2$
e) $6x + x^2$
f) $8x + x^2$

4. Completa en tu cuaderno:

a) $4 \cdot (\ldots + \ldots) = 4x^2 + 4x$
b) $5 \cdot (\ldots + \ldots) = 5a + 5b$
c) $x \cdot (\ldots + \ldots) = 6x^2 + 2x$
d) $y \cdot (\ldots + \ldots) = 3xy + 2y$

5. Igualdades notables



$(x + 2) \cdot (x + 3) = x^2 + 3x + 2x + 2 \cdot 3$

$= x^2 + 5x + 6$

Producto de dos sumas.

Se ha representado el producto $(x + 2) \cdot (x + 3)$.

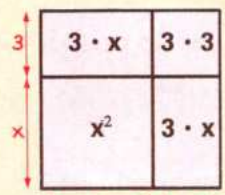
Podemos desarrollar este producto aplicando dos veces la propiedad distributiva.

Primera vez — Segunda vez

$(x + 2) \cdot (x + 3) = (x + 2) \cdot x + (x + 2) \cdot 3 =$

$= x^2 + 2 \cdot x + 3 \cdot x + 2 \cdot 3 =$

$x^2 + 5x + 6$



$(x + 3)^2 = x^2 + 3x + 3x + 3 \cdot 3$

$= x^2 + 6x + 9$

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$

Cuadrado de una suma.

En el caso particular de que los dos factores sean iguales, por ejemplo $(x + 3) \cdot (x + 3)$, resulta el cuadrado de la suma $x + 3$, es decir, $(x + 3)^2$.

Observa la figura y el desarrollo de $(x + 3)^2$

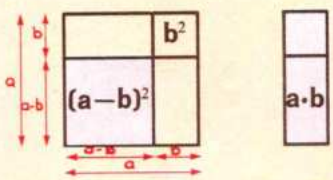
$$(x + 3)^2 = (x + 3) \cdot (x + 3)$$

Procediendo como antes resulta:

$(x + 3) \cdot (x + 3) = x^2 + 3 \cdot x + 3 \cdot x + 3 \cdot 3 = x^2 + 6x + 9$

En general, si **a** y **b** son números enteros:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$



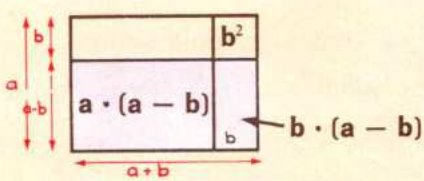
$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b$

Cuadrado de una diferencia.

Si **a** y **b** son dos enteros, se tiene:

$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = (a - b) \cdot a - (a - b) \cdot b =$

$= a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab$



$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Suma por diferencia.

Si **a** y **b** son dos enteros, el producto $(a - b) \cdot (a + b)$ es:

$(a + b) \cdot (a - b) = a \cdot (a - b) + b \cdot (a - b) =$

$= a^2 - a \cdot b + a \cdot b - b^2 = a^2 - b^2$

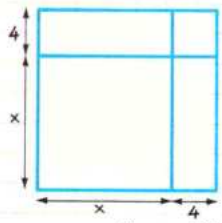
El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado del primero más el cuadrado del segundo más el doble del producto del primero por el segundo.

El cuadrado de la diferencia de dos números es igual al cuadrado del primero más el cuadrado del segundo menos el doble del producto del primero por el segundo.

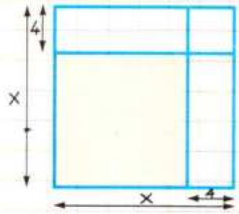
La suma de dos números multiplicada por su diferencia es igual a la diferencia de sus cuadrados.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

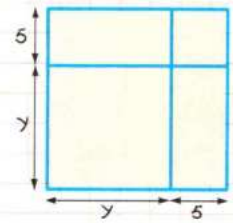
1. Calcula ayudándote de los dibujos:



$(x + 4)^2$



$(x - 4)^2$



$(y + 5)^2$

2. Calcula:

a) $(x + 2)^2$ d) $(x + y)^2$ g) $(x - 2) \cdot (x + 2)$ j) $(6 - x) \cdot (6 + x)$

b) $(x + 3)^2$ e) $(x - y)^2$ h) $(x + 3) \cdot (x - 3)$ k) $(8 - a) \cdot (8 + a)$

c) $(x - 5)^2$ f) $(x - y) \cdot (x + y)$ i) $(x + 5) \cdot (x - 5)$ l) $(a - x) \cdot (a + x)$

3. Calcula los valores numéricos que toman las siguientes expresiones algebraicas:

a) $x + 2xy$ para $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$

b) $x + y - 1$ para $\begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$

c) $2x - 3y$ para $\begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \end{cases}$

d) $3x + 6$ para $x = -2$

4. Calcula:

a) $x^2 + 2x^2$ d) $8x^3 - 6x^3$ g) $7x - 8x$ j) $6x - 8x$

b) $5x - 7x$ e) $-5x^2 + 9x^2$ h) $20x - 5x$ k) $3x - 2x$

c) $3x - x$ f) $6x^2 - x^2$ i) $2x - x$ l) $3x + 2x$

5. Calcula:

a) $x^2 \cdot x^3$ d) $6x^3 \cdot 8x$ g) $6x \cdot 3 \cdot 2x$ j) $3x^9 \cdot 7x^4$

b) $3x^2 \cdot 2x^3$ e) $3x \cdot (-1) \cdot 4x$ h) $-5x^2 \cdot 2x \cdot 3$ k) $2x^5 \cdot 3x^2$

c) $-3x \cdot 2 \cdot x^3$ f) $5x \cdot 2x \cdot (-1) \cdot 3$ i) $3x^2 \cdot 2x^3 \cdot 6x$ l) $6x^4 \cdot 3x$

6. Simplifica los monomios o términos semejantes en los siguientes polinomios:

a) $5x - 3x + x^2 + 4$ c) $9x - 5x + 8x^2$ e) $6 + 2x - 3 + x$

b) $x^2 - 2x + 6x^2 + 4x - 3$ d) $6x + 3x - 5x + 2$ f) $8x - 5x + 3x - 1$

7. Teniendo en cuenta que $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$, comprueba que la diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es igual a la suma de dichos números.

Calcula $(n + 1)^2 - n^2$ y comprueba que resulta $(n + 1) + n = 2n + 1$.

8. La diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos es 573.

¿Cuáles son dichos números?

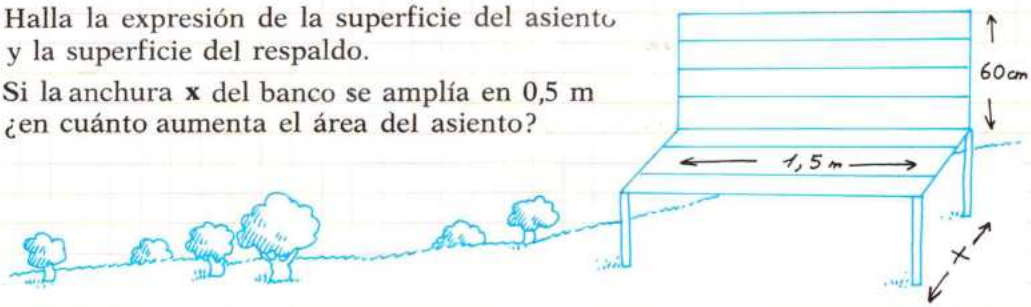
Sugerencia Como $573 = 2n + 1$, entonces 572 es el doble del menor.

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. Un banco tiene la forma y dimensiones que se indican en la figura.

a) Halla la expresión de la superficie del asiento y la superficie del respaldo.

b) Si la anchura **x** del banco se amplía en 0,5 m ¿en cuánto aumenta el área del asiento?



2. Las páginas de un libro tienen 5 cm más de largo que de ancho. Indica la expresión de la superficie de cada página. Determina el aumento o disminución de la superficie de la página, si:

a) El ancho de la página aumenta en 3 cm.

b) El largo aumenta en 3 cm.

c) El largo y el ancho aumentan en 3 cm cada uno.

Haz un dibujo indicativo de cada uno de los casos.

3. Una mesa rectangular dispone de dos alas rectangulares supletorias de 25 cm de ancho, que la convierten en una mesa cuadrada.

Indica la expresión de la superficie de la mesa en los siguientes casos:

a) Antes de desplegar las alas.

b) Cuando se despliega un ala.

c) Cuando se despliegan las dos alas.

d) ¿En cuánto aumenta la superficie de la mesa al incorporar las alas si éstas tienen 1 m de largo?

4. Para urbanizar una zona de una ciudad, el propietario de un solar de forma cuadrada ha de ceder una tira rectangular de 3 m de ancho a lo largo de uno de los lados del solar.

a) ¿En cuánto disminuye la superficie del solar?

b) ¿Cuánto le supone económicamente al propietario si inicialmente el solar estaba valorado en 9.000.000 de ptas.?

5. El espacio en metros recorrido por un cuerpo en caída libre es aproximadamente $\mathbf{e} = 5\mathbf{t}^2$, en donde **t** indica el tiempo en segundos desde el inicio de la caída.

a) Si una piedra que se deja caer en un pozo tarda 4 segundos en llegar abajo, ¿cuál es la profundidad del pozo?

b) Si desde un globo se deja caer un saco de lastre y éste tarda 8 segundos en llegar al suelo, ¿a qué altura va el globo?

c) Si un paracaidista se tira desde un avión y tarda 25 segundos en abrir el paracaídas, ¿qué espacio recorre en caída libre?

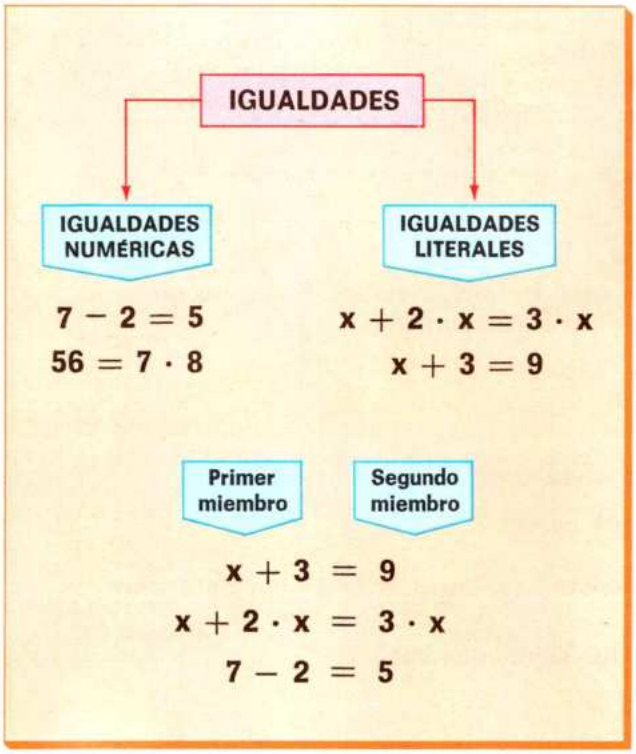
6. Una determinada bacteria se multiplica de tal manera que si en un lugar, en un día, hay **p** individuos, pasados dos días el número de individuos es de $3\mathbf{p}$.

a) ¿Cuántos individuos se contabilizarán pasados 4 días, 6 días y 12 días?

7. En una plaza rectangular, que tiene de largo el triple del ancho más 9 metros, se quiere construir un estanque rectangular que tenga de largo el ancho de la plaza y de ancho 11 metros.

a) ¿Qué anchura como mínimo debe de tener la plaza para que el proyecto pueda llevarse a cabo?

1. Igualdad y ecuación. I



Igualdades.

Observa las siguientes frases y sus expresiones mediante símbolos.

Frases	Expresiones mediante símbolos
Cinco igual a siete menos dos.	$5 = 7 - 2$
La suma de un número con su doble es igual a su triple.	$x + 2 \cdot x = 3 \cdot x$
La suma de un número y dos es igual a 9.	$x + 2 = 9$

En todas estas expresiones aparece el signo = y se llaman **igualdades.**

① $5 = 7 - 2$, ② $x + 2 \cdot x = 3 \cdot x$ y ③ $x + 2 = 9$

En toda igualdad hay que distinguir el **primer miembro** (lo escrito antes del signo =) y el **segundo miembro** (lo escrito después del signo =).

La igualdad ① es una **igualdad numérica**, y las igualdades ② y ③ son igualdades entre expresiones algebraicas y se llaman **igualdades literales.**

1. Indica las igualdades que son ciertas y las que son falsas:

a) $7 + 5 = 12$ b) $8 - 3 = 6$ c) $4 + 3 \cdot 2 = 10$ d) $7 - 3 \cdot 2 = 2$

2. Halla el valor de cada miembro de las siguientes igualdades:

a) $x + 3 \cdot x = 4 \cdot x$, para $x = 1$ → Primer miembro: $1 + 3 \cdot 1 = 4$; Segundo miembro: $4 \cdot 1 = 4$

b) $x + 2 \cdot x = 3 \cdot x$, para $x = 2$ → Primer miembro: ...; Segundo miembro: ...

c) $x + 2 = 3$, para $x = 1$ → Primer miembro: ...; Segundo miembro: ...

d) $x + 2 = 9$, para $x = 7$ → Primer miembro: ...; Segundo miembro: ...

3. Contesta:

¿Es cierta la igualdad $x + 4 = 5$ para $x = 1$? ¿Y para $x = 2$?

4. Escribe las siguientes frases mediante símbolos:

a) La mitad de un número es igual a 8.
b) El triple de un número más ese número es igual a cuatro veces ese número.
c) Un número menos 6 da 13.

2. Igualdad y ecuación. II

Identidad.

La igualdad $x + 2 \cdot x = 3 \cdot x$ es cierta para cualquier valor que se dé a la letra **x**.

	Valor del primer miembro	Valor del segundo miembro	¿Son iguales los dos miembros?
Para $x = 1$	$1 + 2 \cdot 1 = 3$	$3 \cdot 1 = 3$	Sí
Para $x = 2$	$2 + 2 \cdot 2 = 6$	$3 \cdot 2 = 6$	Sí
Para $x = -5$	$-5 + 2 \cdot (-5) = -15$	$3 \cdot (-5) = -15$	Sí

Las igualdades que como $x + 2 \cdot x = 3x$ son ciertas para cualquier valor de la letra **x** se llaman **identidades.**

Ecuación.

Observa ahora que la igualdad $x + 2 = 9$ sólo es cierta si $x = 7$.

	Valor del primer miembro	Valor del segundo miembro	¿Son iguales los dos miembros?
Para $x = 1$	$1 + 2 = 3$	9	No
Para $x = 2$	$2 + 2 = 4$	9	No
Para $x = 7$	$7 + 2 = 9$	9	Sí

Las igualdades que como $x + 2 = 9$ sólo son ciertas para algunos valores de las letras se llaman **ecuaciones.**

La letra o letras desconocidas de una ecuación se llaman **incógnitas.** En la ecuación $x + 2 = 9$ la incógnita es **x.**

La incógnita de una ecuación se puede designar con cualquier letra, pero en general se utiliza la letra **x.**

Identidad es una igualdad literal que es cierta para cualquier valor de las letras.
Ecuación es una igualdad literal que sólo es cierta para algunos valores de las letras.

1. Sustituye la letra x en la igualdad $x^2 - 1 = 3$ sucesivamente por 1, −1, 2, −2, 3 y −3.

- ¿Es cierta esta igualdad para todos los valores de **x**?
  Indica si se trata de una ecuación o de una identidad.

2. Sustituye la letra x en la igualdad $2(x - 1) = 2x - 2$ sucesivamente por 1, −1, 2, −2, 3 y −3.

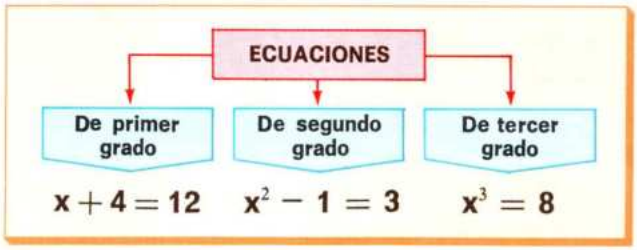
- ¿Es cierta esta igualdad para todos estos valores de **x**?
  Comprueba que es cierta para otros valores de **x.**
  Indica si se trata de una ecuación o de una identidad.

3. Averigua cuáles de las siguientes igualdades son ecuaciones:

a) $2x + 5x = 7x$ b) $5x - 3x = 12$ c) $3x - 1 = 2x + 1$

3. Ecuaciones: soluciones, grado, términos

Grado de una ecuación.



- La ecuación $x^2 - 1 = 3$ se dice que es una ecuación de **segundo grado** porque la incógnita está elevada al cuadrado (2).
- La ecuación $x + 4 = 12$ es una ecuación de **primer grado** porque la incógnita está elevada a 1.

En este curso sólo vas a estudiar ecuaciones de primer grado y con una sola incógnita.

Soluciones de una ecuación.

Ecuación de segundo grado → $x^2 - 1 = 3$

	Primer miembro	Segundo miembro	¿Es cierta la igualdad?
Si $x = 2$	$2^2 - 1 = 3$	3	Sí
Si $x = -2$	$(-2)^2 - 1 = 3$	3	Sí
Si $x = 4$	$4^2 - 1 = 15$	3	No

Ecuación de primer grado → $x + 4 = 12$

	Primer miembro	Segundo miembro	¿Es cierta la igualdad?
Si $x = 2$	$2 + 4 = 6$	12	No
Si $x = 3$	$3 + 4 = 7$	12	No
Si $x = 8$	$8 + 4 = 12$	12	Sí

La ecuación $x^2 - 1 = 3$ sólo es cierta para $x = 2$ y para $x = -2$.

Los números 2 y -2 para los cuales la ecuación es una igualdad cierta se llaman **soluciones** de la ecuación.

Se dice también que las soluciones 2 y -2 verifican la ecuación $x^2 - 1 = 3$.

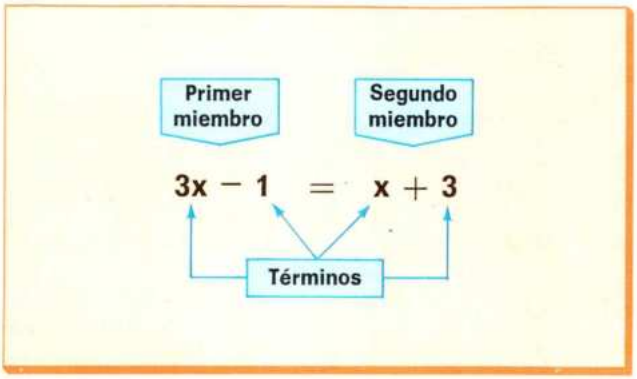
En general, las ecuaciones de segundo grado tienen dos soluciones.

La ecuación $x + 4 = 12$ sólo se verifica si $x = 8$. Se dice que 8 es la solución de la ecuación.

En general, las ecuaciones de primer grado tienen una solución.

Soluciones de una ecuación son los números que la verifican, es decir, los números que convierten la ecuación en una igualdad de números cierta.
Resolver una ecuación es hallar sus soluciones.

Términos de una ecuación.



Observa esta ecuación de primer grado:

$$3x - 1 = x + 3$$

Los sumandos que tiene cada miembro de la ecuación: $3x$, -1, x y 3, se llaman **términos de la ecuación.**

Los términos $3x$ y x se llaman términos en x, y los términos -1 y 3, que no llevan x, se llaman **términos independientes.**

Actividades

1. ¿Es cierta la igualdad $x + 7 = 12$ para $x = 1$? ¿Y para $x = 2$?
¿Es $x + 7 = 12$ una identidad? ¿Es una ecuación?

2. ¿Qué se puede afirmar de una igualdad que, como la anterior, no es cierta para algunos valores de la letra?

3. Averigua si son identidades o son ecuaciones:

a) $x + x = 2x$ c) $x + 2x = 6$ e) $2 \cdot (x - 3) = 2 \cdot x - 6$ g) $x + 7 = 20$
b) $x + 3x = 4x$ d) $x + 7 = 2x$ f) $x(x - 1) = x^2 - x$ h) $x^2 - 1 = 8$

4. Expresa mediante igualdades las frases que se indican:

Frases	Igualdades
El triple de la edad de una persona es 90 años.	$3 \cdot x = 90$
La mitad de la edad de una persona es 32 años.	...
Los $\frac{3}{4}$ del dinero de una persona son 48.000 ptas.	...
La suma de un número y su cuadrado es 20.	...
El triple de un número más ese número es igual a cuatro veces dicho número.	...
Si al doble de un número se le resta cuatro queda seis.	...

5. De las igualdades obtenidas en la actividad anterior, averigua cuáles son ecuaciones y cuáles son identidades.

6. Copia este cuadro en el cuaderno y complétalo:

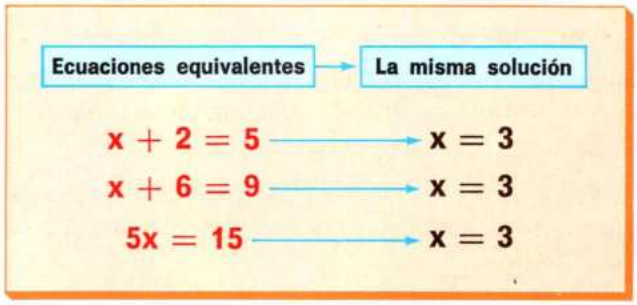
Ecuación	Sustituye x por	Valor del primer miembro	Valor del segundo miembro	¿Es el número sustituido solución de la ecuación?
$x + 5 = 8$	3	$3 + 5 = 8$	8	Sí
$x^2 - 1 = 24$	5	...	...	...
$2x + 6 = 14$	4	...	...	...
$5x - 1 = 3x + 3$	2	...	...	...
$6x - x = x + 28$	7	...	...	...
$4x - 2 = 24$	6	...	...	...

7. En cada una de las ecuaciones de la actividad anterior, indica cuáles son los términos en x y cuáles los términos independientes.

8. Indica el grado de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $x^3 - 1 = 7$ (tercer grado) c) $x + 8 = 19$ e) $-x + 6 = 8$ g) $x^2 - 5 = 20$
b) $x^4 = 16$ d) $x - 7 = 4$ f) $x^2 + 4 = 20$ h) $2x - 6 = 4$

4. Ecuaciones equivalentes por adición y por multiplicación. I



Ecuación equivalente.

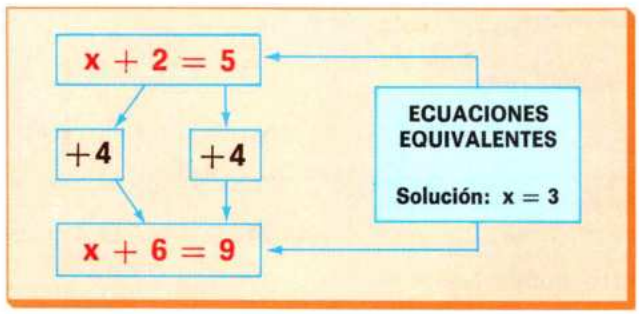
Observa estas ecuaciones:

$x + 2 = 5$ | $x + 6 = 9$ | $5 \cdot x = 15$ | $-5 \cdot x = -15$

Es fácil comprobar que estas ecuaciones tienen todas la misma solución: $x = 3$.

Estas ecuaciones se llaman **ecuaciones equivalentes.**

Ecuaciones equivalentes son aquellas que tienen las mismas soluciones.



Ecuaciones equivalentes por adición.

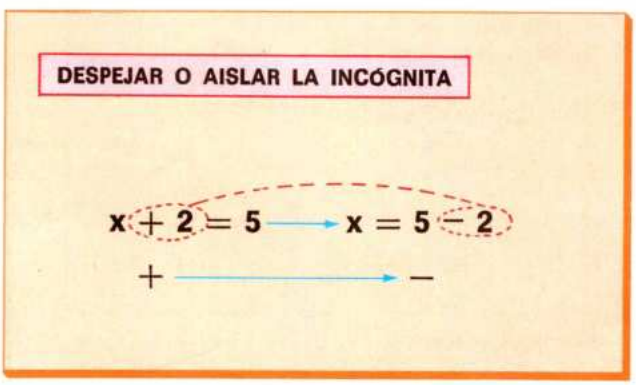
Consideremos la ecuación $x + 2 = 5$, cuya solución es 3.

Sumemos a los dos miembros de la ecuación un número cualquiera, por ejemplo 4:

$$x + 2 = 5 \rightarrow x + 2 + 4 = 5 + 4 \rightarrow x + 6 = 9$$

La ecuación $x + 6 = 9$ que resulta tiene por solución $x = 3$, y es, por tanto, equivalente a la ecuación $x + 2 = 5$, que también tiene por solución $x = 3$.

Si a los dos miembros de una ecuación se les suma un número cualquiera se obtiene otra ecuación equivalente a la dada.



Cómo se despeja la incógnita en una ecuación de la forma $x + a = b$.

Consideremos de nuevo la ecuación $x + 2 = 5$. Si en lugar de sumar un número cualquiera se suma -2 (opuesto del término independiente del primer miembro), queda la incógnita aislada en el primer miembro:

$$x + 2 + (-2) = 5 + (-2)$$
$$x + 0 = 5 + (-2)$$
$$x = 5 - 2 = 3$$

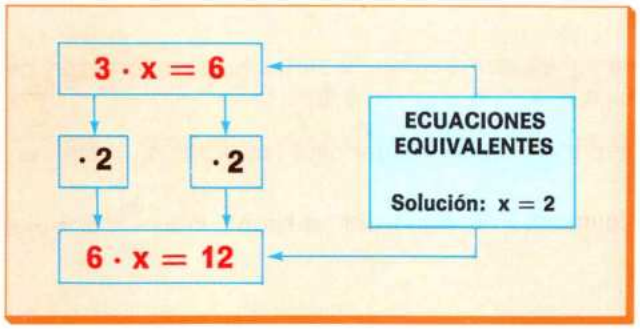
Observa que de la ecuación $x + 2 = 5$ se puede obtener la ecuación $x = 5 - 2$ pasando el 2 del primer miembro al segundo y cambiándole el signo.

1. Resuelve las ecuaciones siguientes sumando a los dos miembros el número que se indica:

a) $x + 8 = 6$. Suma -8
b) $x - 15 = 28$. Suma 15
c) $x + 78 = 100$. Suma -78
d) $x - 35 = 54$. Suma 35
e) $x + 50 = 60$. Suma -50
f) $x - 30 = 62$. Suma 30

5. Ecuaciones equivalentes por adición y por multiplicación. II

Ecuaciones equivalentes por multiplicación.



Consideremos la ecuación $3x=6$, cuya solución es $x=2$.

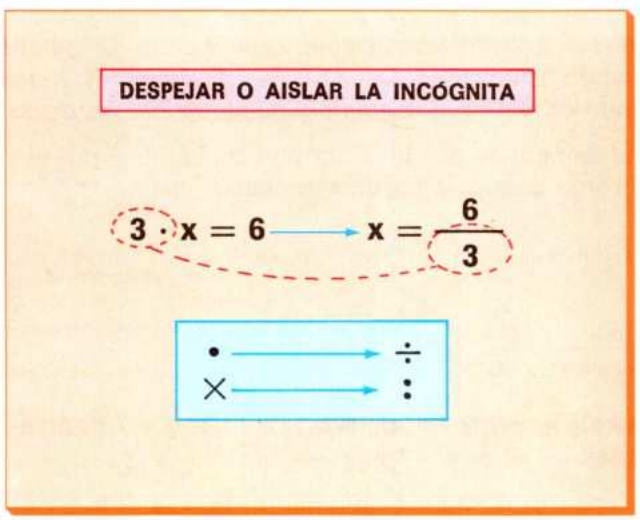
Multipliquemos los dos miembros de la ecuación por un número cualquiera distinto de cero, por ejemplo por 2:

$$3x = 6 \longrightarrow 2 \cdot 3x = 2 \cdot 6 \longrightarrow 6x = 12$$

La ecuación $6x = 12$ que resulta tiene por solución $x = 2$ y es equivalente a la ecuación $3x = 6$. que también tiene por solución $x = 2$.

Si los dos miembros de una ecuación se multiplican por un número cualquiera distinto de cero, se obtiene otra ecuación equivalente a la dada.

Cómo se despeja la incógnita en una ecuación de la forma $ax = b$.



Sea de nuevo la ecuación $3x = 6$. Si en lugar de multiplicar por un número cualquiera se multiplica por $\frac{1}{3}$ (inverso de 3), queda la incógnita aislada en el primer miembro:

$$\frac{1}{3} \cdot 3x = \frac{1}{3} \cdot 6$$

$$1 \cdot x = \frac{6}{3} \longrightarrow x = \frac{6}{3} = 2$$

Observa que el número 3 pasa de ser factor en el primer miembro de la ecuación ($3x = 6$) a ser divisor en el segundo miembro $\left(x = \frac{6}{3}\right)$

1. Resuelve las siguientes ecuaciones multiplicando los dos miembros por el número que se indica:

a) $8x = 56$. $\left(\text{Por } \frac{1}{8}\right)$

b) $7x = 98$. $\left(\text{Por } \frac{1}{7}\right)$

c) $-x = -7$. (Por -1)

d) $15x = -60$. $\left(\text{Por } \frac{1}{15}\right)$

e) $-x = 9$. (Por -1)

f) $-8 = 2x$. $\left(\text{Por } \frac{1}{2}\right)$

g) $4x = 12$. $\left(\text{Por } \frac{1}{4}\right)$

h) $2x = 6$. $\left(\text{Por } \frac{1}{2}\right)$

i) $-4x = 20$. $\left(\text{Por } \frac{-1}{4}\right)$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $-6x = 90 \longrightarrow x = \frac{90}{-6} = -15$

b) $15x = 225 \longrightarrow x =$

c) $-45x = 90 \longrightarrow x =$

d) $-15x = -45 \longrightarrow x =$

6. Resolución de ecuaciones. I

Ecuaciones $a+x=b$ y $ax=b$.

Ecuaciones	Soluciones
$a + x = b$	$x = b - a$
$a \cdot x = b$ con $a \neq 0$	$x = \frac{b}{a}$

Las ecuaciones que hemos resuelto hasta ahora son de la forma $a + x = b$ y $a \cdot x = b$.

La ecuación $a + x = b$ tiene por solución $x = b - a$.

La ecuación $ax = b$ tiene por solución $x = \frac{b}{a}$ si $a \neq 0$

Ecuaciones de la forma $ax + b = c$, con $a \neq 0$

Para resolver la ecuación $2x + 7 = 13$ se hace lo siguiente:

Ecuación $2x + 7 = 13$

① $2x = 13 - 7$

$2x = 6$

Solución ② $x = \frac{6}{2} = 3$

① Se suma -7 a los dos miembros:

$$2x + \underbrace{7 + (-7)}_{0} = 13 + (-7) \rightarrow 2x = 13 - 7$$

Observa que de la ecuación $2x + 7 = 13$ se puede obtener la ecuación $2x = 13 - 7$ llevando el 7 del primer miembro al segundo y cambiándole de signo.

Este cambio se puede hacer con cualquier término y se llama **trasposición de términos.**

② Se despeja x en la ecuación $2x = 13 - 7 = 6$:

$$x = \frac{6}{2} = 3$$

Solución $x = 3$.

Ecuación $ax + b = c$

① $ax = c - b$

Solución ② $x = \frac{c - b}{a}$

En general, la ecuación $ax + b = c$ (con $a \neq 0$) se resuelve así:

① Se pasa b al segundo miembro: $ax = c - b$.

② Se despeja $x \rightarrow x = \frac{c - b}{a}$

Todo término se puede pasar de un miembro a otro cambiándole el signo.

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

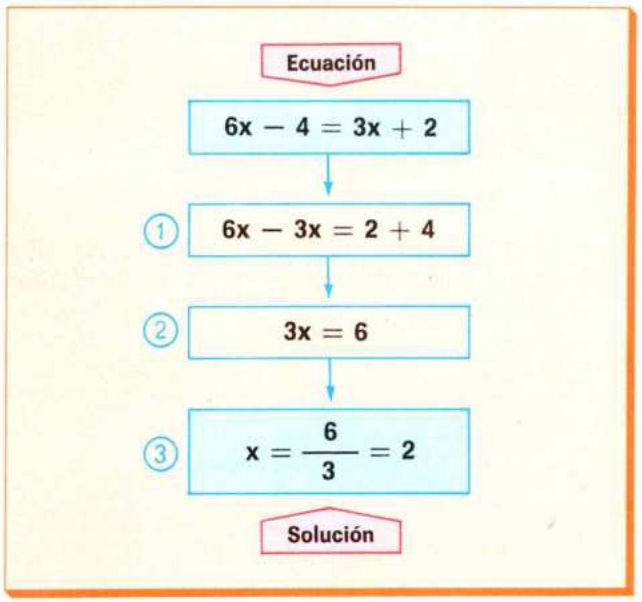
a) $2x + 8 = 18$
b) $3x - 7 = 11$
c) $4x - 12 = 8$
d) $5x - 8 = 7$
e) $-2x + 6 = -4$
f) $-3x - 2 = 4$
g) $-5x + 20 = 10$
h) $-4x + 30 = 18$
i) $3x - 6 = 0$
j) $4x - 20 = 0$
k) $5x - 15 = 0$
l) $8x - 40 = 0$

2. Si p, q, r son números enteros distintos de cero, resuelve las ecuaciones:

a) $2 \cdot x = p$
b) $p \cdot x = 8$
c) $p \cdot x = q$
d) $p + x = q$
e) $px + q = r$
f) $px - q = r$
g) $px + q = 0$
h) $px - q = 0$

7. Resolución de ecuaciones. II

Ecuaciones de la forma $ax + b = cx + d$.



Para resolver esta ecuación $6x - 4 = 3x + 2$:

(1) Se pasan todos los términos en **x** a uno de los miembros de la ecuación, por ejemplo al primero, y se pasan los términos independientes al segundo miembro: $6x - 3x = 2 + 4$.

(2) Se reducen los términos semejantes:

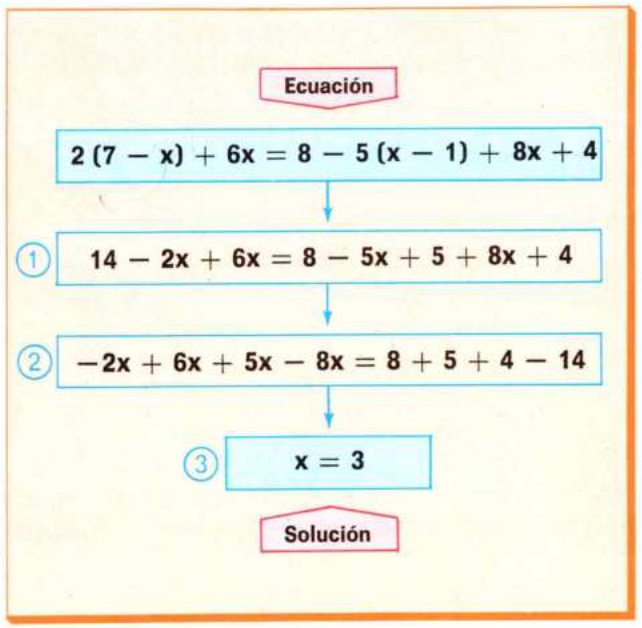
En el primer miembro: $6x - 3x = 3x$.

En el segundo miembro: $2 + 4 = 6$,
y queda $3x = 6$.

(3) Se despeja **x**:

$$x = \frac{6}{3} = 2$$

Ecuaciones con paréntesis.



Para resolver esta ecuación:

$$2\,(7 - x) + 6x = 8 - 5\,(x - 1) + 8x + 4$$

(1) Se suprimen los paréntesis aplicando la propiedad distributiva:

$$14 - 2x + 6x = 8 - 5x + 5 + 8x + 4$$

(2) Se trasponen los términos (los términos en **x** al primer miembro y los términos independientes al segundo):

$$-2x + 6x + 5x - 8x = 8 + 5 + 4 - 14$$

(3) Se reducen los términos semejantes:

En el primer miembro: $-2x + 6x + 5x - 8x = x$.

En el segundo miembro: $8 + 5 + 4 - 14 = 3$.

Solución $x = 3$.

1. Resuelve las ecuaciones:

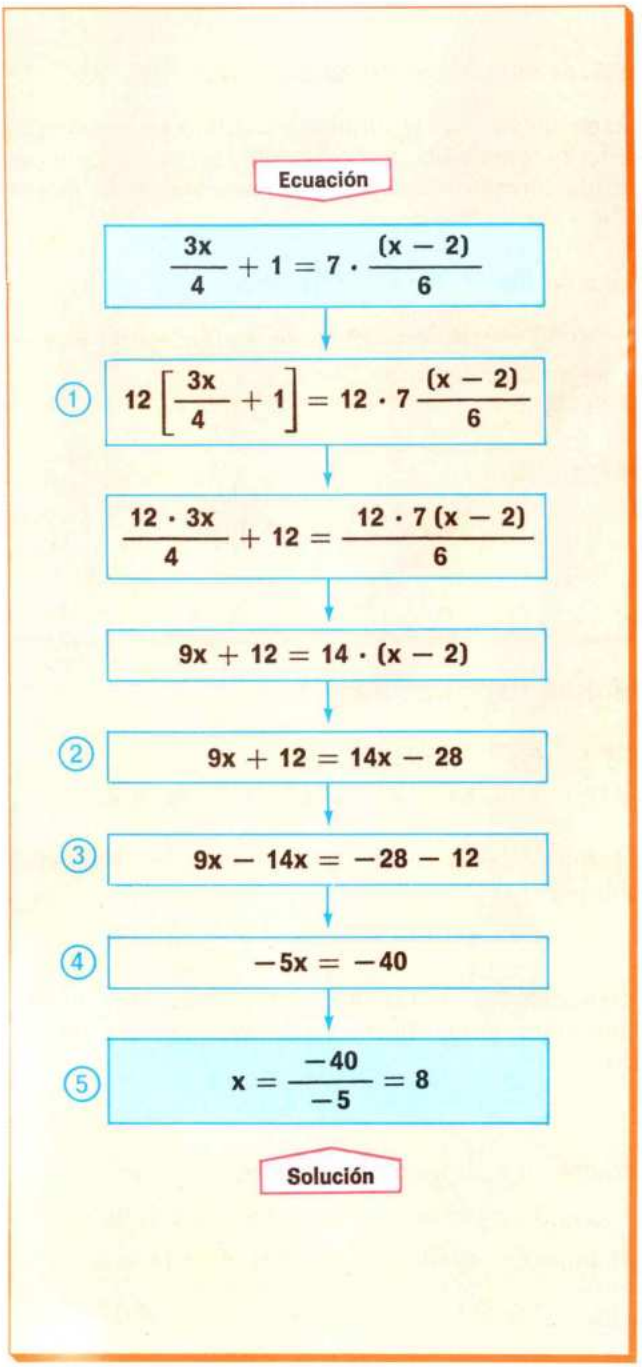
a) $3x - 2 = 4x - 7$
b) $6x - 3 = 2x + 1$
c) $10 + 2x = 7x - 15$
d) $-3x + 2 = x + 10$
e) $3 \cdot (6 + x) = 2 \cdot (x - 5)$
f) $9 \cdot (x - 1) = 6 \cdot (x + 3)$
g) $x - 7 = 2 \cdot (x - 3)$
h) $12 - (x - 3) = 6$
i) $2x - 7 = 3x - 8$
j) $2x + 2 = x + 2$
k) $2x + 2 = x + 5$
l) $8 \cdot (x - 2) = 12 \cdot (x - 3)$

2. Fíjate en los pasos dados para resolver la ecuación $ax + b = cx + d$ y despeja x:

$ax + b = cx + d \rightarrow ax - cx = d - b \rightarrow x \cdot (a - c) = (d - b)$, si $a - c \neq 0$; $x = \ldots$

8. Resolución de ecuaciones. III

Ecuaciones con denominadores.



Para resolver esta ecuación:

$$\frac{3x}{4} + 1 = 7 \cdot \frac{(x-2)}{6}$$

① Se suprimen los denominadores multiplicando los dos miembros por el m.c.m. de los denominadores:

$$\text{m.c.m. } (4, 6) = 12$$

$$12 \cdot \left[\frac{3x}{4} + 1\right] = 12 \cdot \frac{7 \cdot (x-2)}{6}$$

$$12 \cdot \frac{3x}{4} + 12 = \frac{12 \cdot 7\,(x-2)}{6}$$

$$9x + 12 = 14 \cdot (x-2)$$

② Se suprimen los paréntesis aplicando la propiedad distributiva:

$$9x + 12 = 14x - 28$$

③ Se trasponen términos (los términos en x a un miembro y los términos independientes al otro):

$$9x - 14x = -28 - 12$$

④ Se reducen términos semejantes:

En el primer miembro: $9x - 14x = -5x$.

En el segundo miembro: $-28 - 12 = -40$, y queda $-5x = -40$.

⑤ Se despeja la incógnita:

$$x = \frac{-40}{-5} = 8$$

En general, los pasos a seguir para resolver una ecuación con denominadores son los que se ven al margen.

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x}{2} = 4$

b) $\frac{x}{5} = -2$

c) $\frac{-x}{7} = 9$

d) $\frac{x}{8} = 15$

e) $\frac{x}{2} + 3 = \frac{x}{3} + 4$

f) $\frac{x}{3} + 5 = 2x - 15$

g) $\frac{x-1}{3} = 2$

h) $\frac{x-1}{6} - \frac{x-3}{2} = -1$

i) $\frac{3x}{6} - \frac{x+6}{3} = -2$

Actividades

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

① $x + 2 = 9$ ③ $x - 1 = 6$ ⑤ $x + 1 = 5$ ⑦ $x + 1 = 10$ ⑨ $x - 10 = 20$

② $x - 2 = 5$ ④ $x - 3 = 8$ ⑥ $x + 1 = 8$ ⑧ $x - 3 = 10$ ⑩ $x - 10 = 30$

2. Resuelve las ecuaciones:

① $2x = 4$ ③ $3x = 18$ ⑤ $5x = 100$ ⑦ $-x = 5$ ⑨ $-x = -8$ ⑪ $4x = 12$

② $2x = 6$ ④ $4x = 40$ ⑥ $6x = 54$ ⑧ $-x = 6$ ⑩ $-x = -4$ ⑫ $5x = -20$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Averigua si las siguientes igualdades son identidades o ecuaciones:

a) $2(x - 3) = 2x - 6$ c) $12x - 5 = 7$ e) $2x - 2 = 2(x - 1)$ g) $x + 7 = 20$

b) $(x - 1) \cdot 5 = 5x - 5$ d) $3x - 5 = -2$ f) $5(x - 1) = 15$ h) $2x = 0$

2. Si a los dos miembros de una ecuación se les suma el mismo número ¿cómo es la ecuación que resulta con relación a la primera ecuación?

¿Y si se multiplican los dos miembros de una ecuación por un mismo número distinto de cero?

3. Dada la ecuación $2x - 3 = x + 2$:

a) Suma 3 a los dos miembros.

b) Suma -2 a los dos miembros.

c) Suma $-x$ a los dos miembros.

¿Cómo son las ecuaciones que resultan? ¿Cuál es la solución?

4. Resuelve las siguientes ecuaciones donde la incógnita es x y las demás letras representan números enteros:

a) $x + a = b$ c) $ax = b$ e) $mx = p$ g) $2x = b$

b) $x + p = q$ d) $ax - c = 0$ f) $mx - q = 0$ h) $3x - x = 0$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x}{2} - 1 = x$ c) $(x + 1)3 - 5 = 2x + 1$ e) $\frac{x + 6}{10} - \frac{x + 2}{3} = -1$

b) $\frac{x}{2} = 7$ d) $\frac{x + 1}{3} - \frac{x - 1}{4} = 1$ f) $2(x - 1) + x = 7$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{4}{x - 3} = \frac{5}{x - 2}$

Sugerencia Los productos cruzados deben ser iguales: $4(x - 2) = 5(x - 3)$.

b) $\frac{2x - 1}{6} - 5 = \frac{x - 3}{4}$

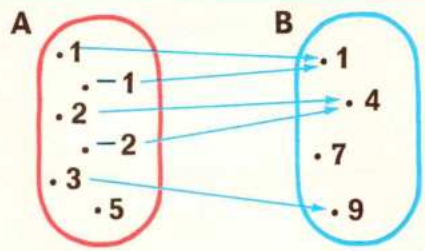
c) $\frac{x + 11}{6} - \frac{x + 5}{3} = 0$

TEMA 8 APLICACIONES Y FUNCIONES

1. Correspondencias

Determinación de una correspondencia.

Criterio de esta correspondencia
«... tiene por cuadrado...»



Conjunto inicial **Conjunto final**

$A = \{1, -1, 2, -2, 3, 5\}$ $B = \{1, 4, 7, 9\}$

Grafo de la correspondencia

$G = \{(1, 1), (-1, 1), (2, 4), (-2, 4), (3, 9)\}$

Entre los conjuntos

$A = \{1, -1, 2, -2, 3, 5\}$ y $B = \{1, 4, 7, 9\}$

se establece una correspondencia con el criterio «... tiene por cuadrado...».

El conjunto **A** se llama **conjunto inicial** o de partida.

El conjunto **B** se llama **conjunto final** o de llegada.

Observa el diagrama de flechas de esta correspondencia.

Del 2 sale una flecha que va al 4. Esto significa:

- Que 4 es imagen de 2.
- Que 2 es el original o antiimagen de 4.

Que el par (2, 4) es un par de esta correspondencia.

El conjunto de los pares de la correspondencia se llama **grafo de la correspondencia.**

$G = \{(1, 1), (-1, 1), (2, 4), (-2, 4), (3, 9)\}$

Conjunto original y conjunto imagen.

Conjunto original **Conjunto imagen**

$\{1, -1, 2, -2, 3\}$ $\{1, 4, 9\}$

Conjunto original ⊂ conjunto inicial
Conjunto imagen ⊂ conjunto final

El conjunto formado por los elementos que tienen imagen se llama **conjunto original.**

Conjunto original $= \{1, -1, 2, -2, 3\}$

El conjunto formado por los elementos imágenes se llama **conjunto imagen.**

Conjunto imagen $= \{1, 4, 9\}$

En general, el conjunto original es subconjunto del conjunto inicial y el conjunto imagen es subconjunto del conjunto final.

Una correspondencia entre dos conjuntos queda determinada cuando se conocen el conjunto inicial, el conjunto final y/o su criterio de formación o su grafo.

1. Observa de nuevo el diagrama de flechas de la correspondencia de esta página y contesta:

a) ¿Cuál es la imagen de 3? ¿Y la imagen de −1?
b) ¿Cuál es el original o antiimagen de 9?
c) ¿Qué elementos tienen dos antiimágenes?

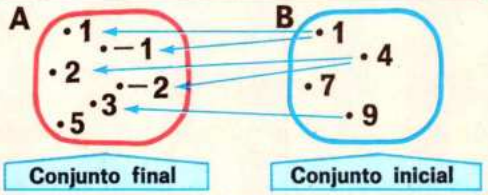
2. Lee atentamente y contesta:

Dados los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ y la correspondencia definida por el grafo $G = \{(a, 1), (a, 2), (b, 3), (c, 3)\}$:

a) ¿Cuál es el conjunto original?
b) ¿Y el conjunto imagen?
c) Haz el diagrama de flechas.
d) ¿Cuál es la imagen de b?

2. Aplicación

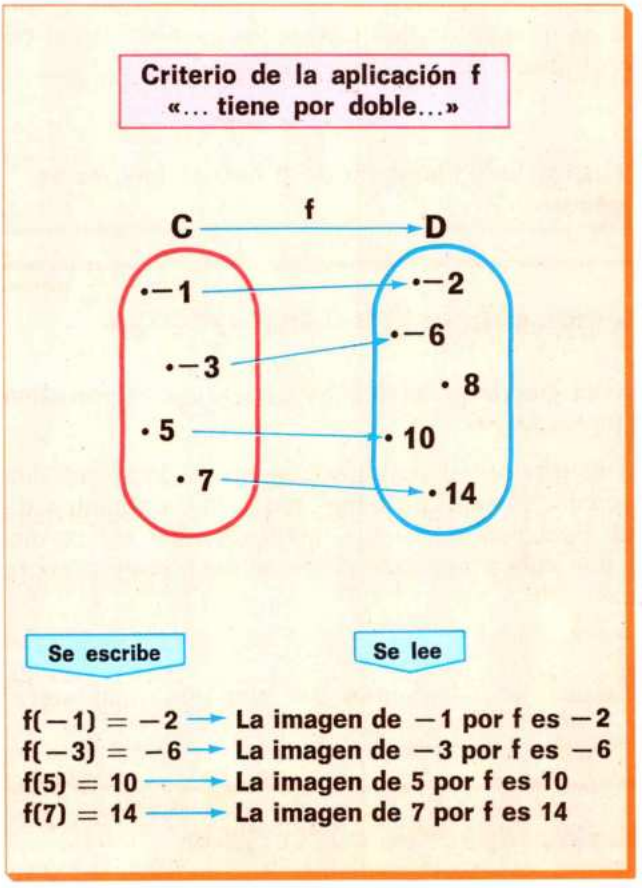
Correspondencia recíproca o inversa.



Si en la correspondencia anterior de **A** en **B** se cambia el sentido de las flechas, resulta una nueva correspondencia de **B** en **A** que se llama **correspondencia recíproca** o **inversa** de la dada.

El criterio de esta correspondencia es «... tiene por raíz cuadrada...».

Aplicación.



Considera la correspondencia entre los conjuntos **C** y **D**, dada por el criterio: «... tiene por doble...»:

C = {−1, −3, 5, 7} **D** = {−2, −6, 8, 10, 14}

Observa en el diagrama de flechas de esta correspondencia que:

- Todo elemento del conjunto inicial tiene imagen, es decir, el conjunto original coincide con el conjunto final.
- Cada elemento del conjunto inicial tiene una sola imagen.

Por cumplir estas dos condiciones se dice que esta correspondencia es una aplicación.

Las aplicaciones se designan con las letras **f, g, h**...

Así, si llamamos **f** a esta aplicación de **C** en **D** se escribe:

$$C \xrightarrow{f} D$$

Para expresar que la imagen de −3 es −6 se escribe:

$$f(-3) = -6$$

Del mismo modo: $f(-1) = -2$; $f(5) = 10$; $f(7) = 14$.

En general, si **x** es un elemento del conjunto inicial, su imagen formada por **f** se designa por **f(x)**.

f(x) se lee: **f de x**

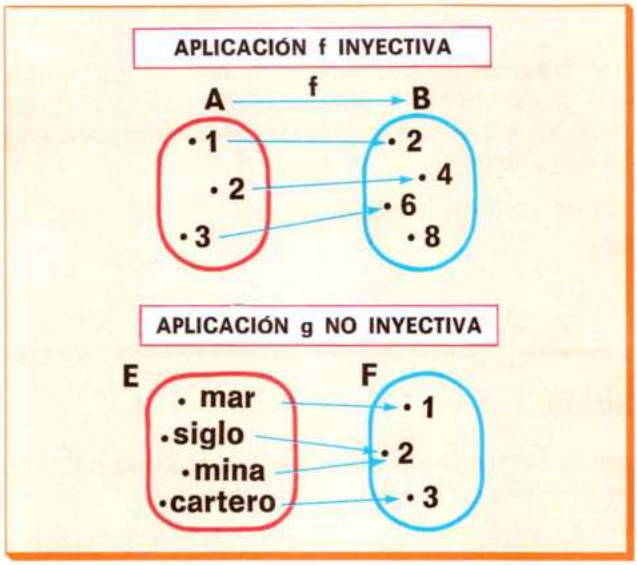
Una aplicación es una correspondencia en la que el conjunto original coincide con el conjunto inicial y en la que cada elemento tiene una sola imagen.

1. Cambia de sentido las flechas de la aplicación f y obtendrás el diagrama de la correspondencia inversa de f, que es una correspondencia de D en C.

- ¿Cuál es el conjunto original de esta correspondencia? ¿Y el conjunto imagen?
- ¿Es esta correspondencia inversa una aplicación?
- ¿Se puede decir que la correspondencia inversa de una aplicación es también aplicación?

3. Clases de aplicaciones

Aplicación inyectiva.



Observa los diagramas de flechas de las aplicaciones **f** y **g**:

$$A \xrightarrow{f} B \quad y \quad E \xrightarrow{g} F$$

- El criterio de **f** es: «... tiene por doble...».
- El criterio de **g** es: «... tiene por número de vocales...».

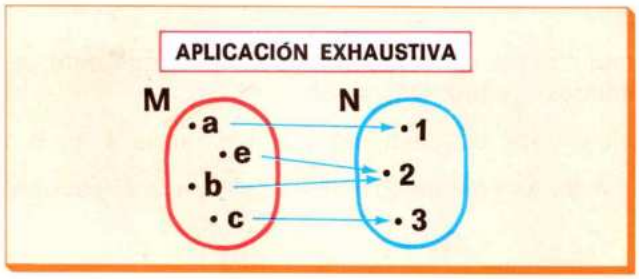
Se observa que en la aplicación **f** no hay ningún elemento de **B** que sea imagen de más de un elemento de **A**.

Se dice por eso que la aplicación **f** es una **aplicación inyectiva.**

En cambio, la aplicación **g** no es inyectiva porque el elemento 2 es imagen de dos elementos (siglo y mina) del conjunto inicial.

Una aplicación de A en B es inyectiva cuando todo elemento de B que es imagen de un elemento de A lo es de un solo elemento.

Aplicación exhaustiva o suprayectiva.

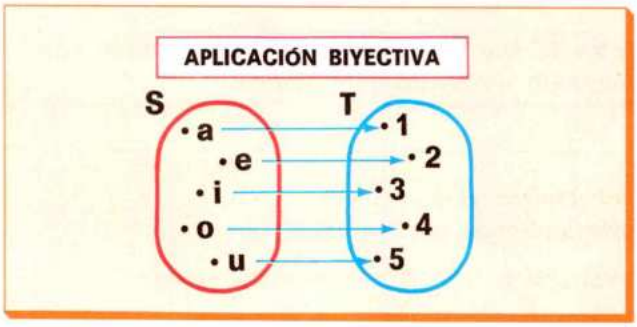


Observa el diagrama de flechas de una aplicación entre los conjuntos **M** y **N.**

En esta aplicación, el conjunto imagen {**1, 2, 3**} coincide con el conjunto final; es decir, todos los elementos del conjunto final son elementos imágenes. Por eso se dice que es una **aplicación exhaustiva, suprayectiva** o **sobreyectiva.**

Una aplicación es exhaustiva cuando todos los elementos del conjunto final son elementos imágenes.

Aplicación biyectiva o biyección.



Observa el diagrama de flechas entre los conjuntos **S** y **T.**

Esta aplicación es inyectiva porque cada elemento de **T** es imagen de un solo elemento de **S.**

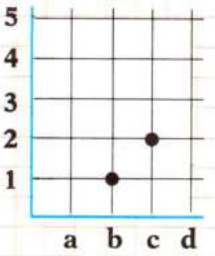
Esta aplicación es también exhaustiva porque todos los elementos del conjunto final son elementos imágenes.

Por eso se dice que es una **aplicación biyectiva.**

Una aplicación se dice que es biyectiva cuando a la vez es inyectiva y exhaustiva.

Actividades

1. Dada la correspondencia de **A** = {**a, b, c, d**} en **B** = {**1, 2, 3, 4, 5**}, dada por el grafo **G** = {**(a, 3), (b, 1), (c, 2), (d, 4)**}:

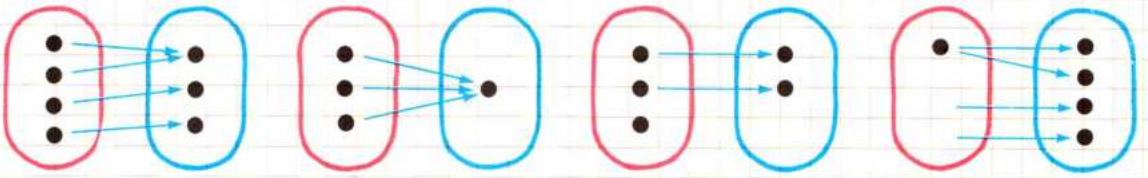


   a) Haz el diagrama de flechas y completa el diagrama cartesiano.

   b) Escribe el conjunto original y el conjunto imagen.

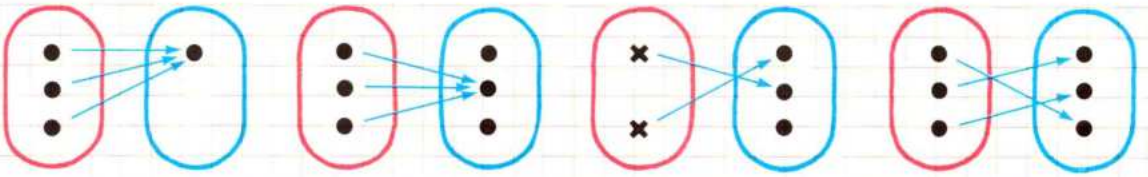
   c) ¿Es una aplicación esta correspondencia? En caso afirmativo ¿es aplicación inyectiva?

2. Indica cuál de las siguientes correspondencias son aplicaciones:



3. Copia en tu cuaderno los siguientes diagramas de aplicaciones y escribe debajo de cada uno, según convenga, las etiquetas siguientes:

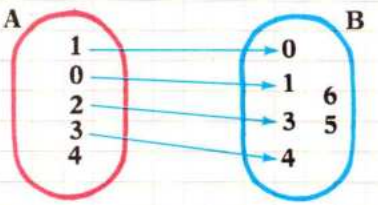
Inyectiva **No inyectiva** **Exhaustiva** **No exhaustiva** **Biyectiva**



4. Si entre dos conjuntos **A** y **B** se puede establecer una aplicación biyectiva ¿qué puedes decir del número de elementos de **A** y de **B**?

   ¿Y si entre **C** y **D** hay una aplicación inyectiva? ¿Puede tener **C** más elementos que **D**? ¿Y si entre **E** y **F** hay una aplicación exhaustiva? ¿Puede tener **E** más elementos que **F**? ¿Y **F** más elementos que **E**?

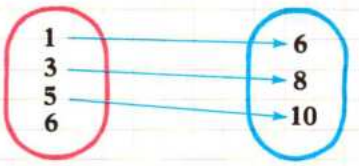
5. Observa la correspondencia de **A** en **B** definida por el diagrama de flechas.



   - ¿Es aplicación?
   - ¿Hay algún elemento del conjunto inicial que tenga más de una imagen?

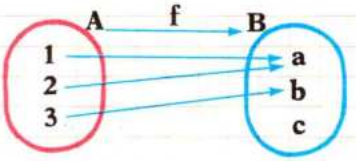
   Estas correspondencias entre conjuntos numéricos de las que cada elemento tiene a lo sumo una imagen se llaman **funciones.**

6. Observa el diagrama de flechas de una función.



   - ¿Cuál es el conjunto original?
   - ¿Coincide con el conjunto inicial?

7. Haz el diagrama de flechas de la correspondencia recíproca o inversa de la aplicación **f** de **A** en **B.**

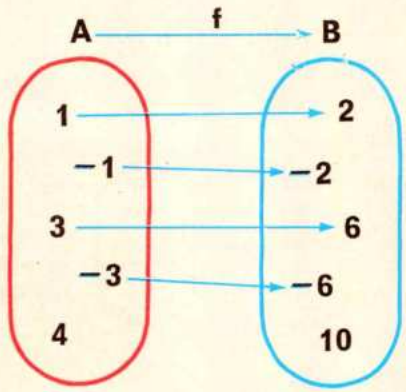


   - ¿Es aplicación la correspondencia recíproca de **f**?

4. Función y aplicación

Concepto de función.

FUNCIÓN f. NINGÚN NÚMERO TIENE MÁS DE UNA IMAGEN



Considera la correspondencia **f** del conjunto **A** en el conjunto **B**, definida por el criterio «... tiene por doble...»:

$$A = \{1, -1, 3, -3, 4\}$$
$$B = \{2, -2, 6, -6, 10\}$$

$$A \xrightarrow{f} B$$
$$x \longrightarrow 2 \cdot x$$

Observa en el diagrama de flechas que no hay ningún elemento de **A** que tenga más de una imagen.

Se dice por ello que esta correspondencia es una **función.**

Como el elemento 4 de **A** no tiene imagen, esta correspondencia no es aplicación.

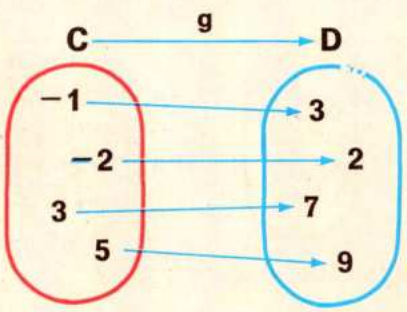
La imagen de 1 es 2, se escribe **f**(1) = 2 y se lee **f de 1 es igual a 2.**

Del mismo modo, **f**(−1) = −2, **f**(3) = 6, ...

Una función entre dos conjuntos numéricos es una correspondencia tal que no hay ningún número que tenga más de una imagen.

Función y aplicación.

APLICACIÓN g: TAMBIÉN ES UNA FUNCIÓN



Considera la aplicación **g** de **C** en **D** dada por el criterio «sumar 4»:

$$C \xrightarrow{g} D$$
$$x \longrightarrow x + 4$$

Observa que:

1. Ningún elemento de **C** tiene más de una imagen.
2. Todos los elementos de **C** tienen imagen.

La primera condición indica que la aplicación **g** es también una función entre conjuntos numéricos.

Las aplicaciones entre conjuntos numéricos se llaman indistintamente **aplicaciones** o **funciones.**

Toda aplicación entre conjuntos numéricos es también una función.

1. Observa las funciones f y g de esta página y completa:

g(−1) = 3	g(−2) =	g(5) =	g(3) =
f(−3) =	f(3) =	f(1) =	f(−1) =

5. Dominio y ecuación de una función

Dominio y tabla de valores.

Función f

$\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$

$x \longrightarrow x + 3$

TABLA DE VALORES DE LA FUNCIÓN f

x	x + 3
−1	2
−2	1
0	3
1	4
2	5
⋮	⋮

Elementos originales — Elementos imágenes

Consideremos la función **f** de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ definida por el criterio «sumar 3»:

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$x \longrightarrow x + 3$$

Esta función hace corresponder a cada número entero **x** el que se obtenga al sumarle tres unidades.

Los valores que puede tomar **x** en esta función son todos los números enteros, y éstos forman el **dominio** o **campo de existencia de la función** o el conjunto original de la función.

Con los elementos originales y los elementos imágenes se puede formar una tabla de valores de la función.

¿Cuál es la imagen de −1 en la función **f(x)** = x + 3?

$$f(-1) = -1 + 3 = 2$$

Dominio de una función es el conjunto formado por los elementos que tienen imagen o también el conjunto de valores que puede tomar la variable x.

Ecuación de una función.

ECUACIÓN DE LA FUNCIÓN f

Primera forma: $f(x) = x + 3$ — Segunda forma: $y = x + 3$

x → variable independiente

y → variable dependiente

	A → h → B					
x	1	−1	2	−2	3	−3
h (x)	1	1	2	2	3	3

La igualdad **f(x)** = x + 3 se llama **ecuación de la función f**:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$$

Es frecuente designar la imagen de **x**, es decir, **f(x)**, por **y**. En este caso la ecuación de la función se designa por

$$y = x + 3$$

- La letra **x** representa cualquier número entero del dominio y se llama **variable independiente.**
- Los valores que toma la letra **y** dependen de los valores que se dan a la letra **x**; por eso la letra **y** se llama **variable dependiente.**

Las operaciones que hay que hacer con la variable **x** para obtener la variable **y** vienen expresadas por la ecuación de la función.

Hay funciones que no vienen definidas por una ecuación. Así, la función **h** de **A** = {1, −1, 2, −2, 3, −3} en **B** = {1, 2, 3} está definida por el conjunto de pares **G**.

$$G = \{(1, 1), (-1, 1), (2, 2), (-2, 2), (3, 3), (-3, 3)\}$$

Se llama ecuación de una función a la relación que expresa las operaciones que hay que hacer en la variable x para obtener la variable y.

6. Funciones de variable entera. Cálculo de originales o antiimágenes

Funciones de variable entera.

Función de variable entera: $\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$, $f(x) = x + 3$

Función de variable racional: $\mathbb{Q}^+ \xrightarrow{h} \mathbb{Q}^+$, $h(x) = 2x$

TABLA DE VALORES DE LA FUNCIÓN h

x	h(x) = 2x
0	0
$\frac{1}{2}$	1
1	2
2	4
⋮	⋮

En las funciones estudiadas hasta ahora los valores que podía tomar la variable independiente **x** eran números enteros; por eso estas funciones se llaman **funciones de variable entera.**

Observa la tabla de valores de la función **h** de $\mathbb{Q}^+$ en $\mathbb{Q}^+$ (números racionales positivos):

$$\mathbb{Q}^+ \xrightarrow{h} \mathbb{Q}^+$$
$$x \longrightarrow 2x$$

En esta función la variable **x** puede tomar como valor cualquier número racional positivo, y se dice que es una **función de variable racional positiva.**

Una función de variable entera es toda función cuyo dominio es una parte del conjunto de los números enteros.

Cálculo de la imagen y de la antiimagen de un número por una función.

CÁLCULO DE ANTIIMÁGENES

Función: $f(x) = 2x + 5$

¿Cuál es la antiimagen de 19?

Ecuación: $2x + 5 = 19$

$2x = 19 - 5 = 14$

Solución: $x = \frac{14}{2} = 7$

Dada la función de variable entera $f(x) = 2x + 5$, o bien $y = 2x + 5$, para hallar la imagen de un número, por ejemplo de 3, basta sustituir **x** por 3:

$$f(3) = 2 \cdot 3 + 5 = 6 + 5 = 11$$

Vamos a proponernos ahora otro problema. ¿Cómo se sabe si un número conocido tiene original o antiimagen?

¿Tiene antiimagen el número 19?

Para saberlo hay que calcular el valor de **x** en la ecuación $2x + 5 = 19$:

$$2x = 19 - 5 \rightarrow = 14 \rightarrow x = \frac{14}{2} = 7$$

$$f(7) = 2 \cdot 7 + 5 = 19$$

La antiimagen del número 19 es 7

1. Completa las tablas de valores correspondientes a las siguientes funciones de variable entera:

$y = x - 5$

x	−2	…	6	…
y	…	−1	…	3

$y = 3(x - 2) + 1$

x	−1	…	2	…
y	…	−5	…	4

$y = 2x + 1$

x	0	1	…	…
y	…	…	−9	15

Actividades

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

1. Dada la función $f(x) = 2x + 1$ de variable entera, calcula las siguientes imágenes de:

① 0	③ −2	⑤ 3	⑦ 5	⑨ 7	⑪ 10
② 1	④ −1	⑥ 4	⑧ 6	⑩ 8	⑫ 11

2. Dada la ecuación de variable entera $f(x) = x - 10$, calcula las imágenes de:

① 10	③ 12	⑤ 13	⑦ −5	⑨ −20	⑪ 100	⑬ 40
② 20	④ 15	⑥ 6	⑧ −10	⑩ −20	⑫ −100	⑭ −40

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Haz el diagrama de una aplicación de **A** en **B**: $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$, siendo **A** el conjunto inicial.

¿Puedes trazar el diagrama de una aplicación inyectiva? ¿Y el diagrama de una aplicación exhaustiva?

2. Entre los conjuntos $A = \{p, q, r, s\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$ se establece la aplicación **f** dada por el grafo $G = \{(p, a), (q, d), (r, c), (s, b)\}$.

- ¿Qué tipo de aplicación es?
- Halla $f(p)$ y $f(r)$.
- Haz el diagrama de **f** y el diagrama de la correspondencia inversa de **f**.
- ¿Es aplicación la correspondencia inversa de **f**?

3. Dadas las funciones de variable entera, escribe la ecuación de estas funciones:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \qquad x \longrightarrow x + 8 \qquad \text{y} \qquad \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z} \qquad x \longrightarrow 6x$$

4. Completa las tablas de valores de estas funciones de variable entera:

$y = 2x - 3$

x	−3	...	...	3	4
2x − 3	...	−7	−3	...	...

$y = 5x - 2$

x	...	−1	0	...	...
5x − 2	−22	...	...	13	18

5. Dadas las funciones de variable entera:

$f(x) = 3x - 2$ $\qquad$ $g(x) = 2x + 6$ $\qquad$ $h(x) = 2(x - 1) + 5$

Calcula:

a) $f(1)$, $f(2)$, $f(-3)$, $f(5)$, $f(-4)$, $f(-7)$, $f(0)$

b) $g(2)$, $g(-1)$, $g(5)$, $g(7)$, $g(10)$, $g(-10)$, $g(0)$

c) $h(0)$, $h(-1)$, $h(1)$, $h(2)$, $h(-2)$, $h(3)$, $h(-4)$

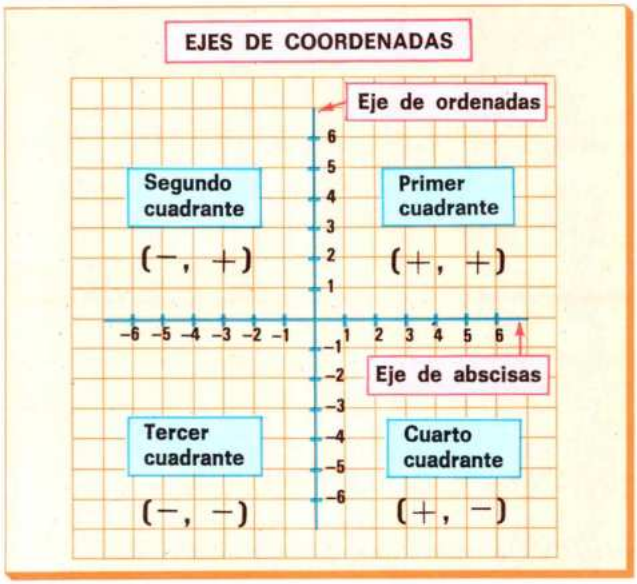
d) Calcula la antiimagen de 22 en la función **f**.

e) Calcula la antiimagen de −4 en la función **g**.

TEMA 9 LA FUNCIÓN LINEAL

1. Representación gráfica de funciones. I

Ejes de coordenadas.



Para representar gráficamente las funciones se utilizan los **ejes de coordenadas.**

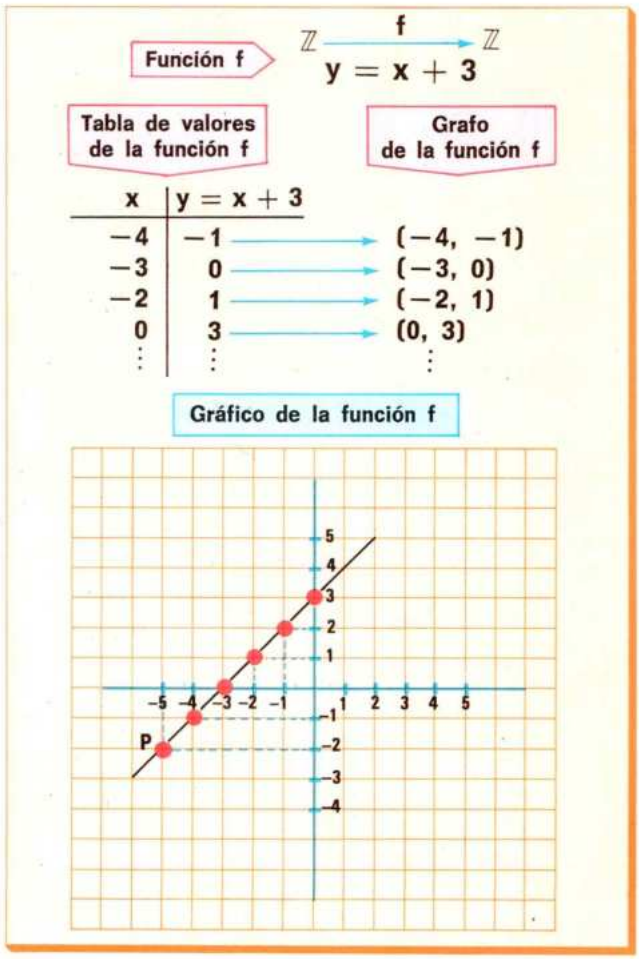
Los ejes de coordenadas son dos rectas perpendiculares en las que se han representado los números enteros.

- El eje horizontal se llama **eje de abscisas** o **eje de las x,** y en él se representan los valores de la variable independiente.
- El eje vertical se llama **eje de ordenadas** o **eje de las y,** y en él se representan los valores de la variable dependiente.

Observa que los ejes de coordenadas dividen al plano en cuatro cuadrantes.

En el primer cuadrante las dos coordenadas son positivas (+, +); observa los signos en los otros cuadrantes.

Representación de la función $f(x) = x + 3$.



Consideremos la función de **variable entera** $\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$, definida por la ecuación $y = x + 3$.

Observa la tabla de valores de esta función.

La tabla de valores proporciona un conjunto de pares ordenados.

Cada par ordenado se representa por un punto.

Para representar el par ordenado **(−5, −2)** de la función se lleva la abscisa −5 sobre el eje horizontal y la ordenada −2 sobre el eje vertical.

Así resulta el punto **P**, que representa el par ordenado (−5, −2).

Haciendo lo mismo con los demás pares ordenados, se observa que todos los puntos están sobre una recta, es decir, **el gráfico de la función $f(x) = x + 3$ está sobre una recta.**

2. Representación gráfica de funciones. II

Representación gráfica de la función y = 3x.

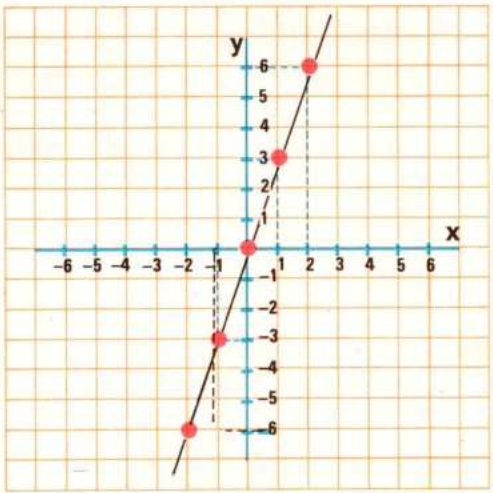
Función g de variable entera

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}, \quad y = 3x$$

Tabla de valores de la función g

x	−2	−1	0	1	2	...
y = 3x	−6	−3	0	3	6	...

Representación gráfica de la función y = 3x



Consideremos la función **g** de variable entera $\mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}$ definida por la ecuación **y = 3x.**

Observa la tabla de valores de esta función, que en esta ocasión se ha dispuesto en forma horizontal.

Representemos en los ejes de coordenadas estos puntos:

(−2, −6), (−1, −3), (0, 0), (1, 3), (2, 6), ...

Se observa que todos los puntos que forman el gráfico, o representación gráfica de la función, están sobre una recta que pasa por el origen de coordenadas.

El gráfico o representación gráfica de una función de variable entera de la forma y = ax está formado por un conjunto de puntos que están sobre una recta que pasa por el origen de coordenadas.

1. Considera las funciones de variable entera de ecuaciones y = 3x e y = 3x + 2.

- Represéntalas en los mismos ejes de coordenadas. Comprueba que los gráficos de estas funciones están sobre rectas paralelas.
- ¿Qué tienen en común las funciones de ecuaciones y = 3x e y = 3x + 2?

2. Representa las rectas que contiene el gráfico de cada una de las funciones de variable entera y = 2x e y = 2x + 1.

- ¿Cómo son estas rectas? ¿Qué tienen en común las ecuaciones anteriores?

3. Representa la recta que contiene a la gráfica de la función de ecuación y = 2x y la recta que contiene el gráfico de la función de ecuación y = 3x.

- ¿Qué recta se aproxima más al eje de ordenadas?

4. ¿Está el punto P(2, 6) en el gráfico de la función f(x) = 2x + 4? Como f(2) = 2 · 2 + 4 = 8 es distinto de 6, el punto P(2, 6) no está en el gráfico o representación gráfica de f.

Averigua si están en el gráfico de **f** los puntos

M(6, 10), **N**(−5, −6), **R**(−3, −2), **Q**(−7, −11).

Función lineal

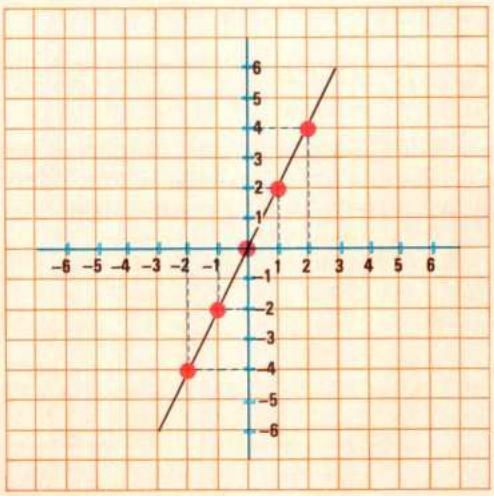
$\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$

$y = 2x$

Tabla de valores de la función f de ecuación y = 2x

x	−3	−2	−1	0	1	2	3	...
y = 2x	−6	−4	−2	0	2	4	6	...

Gráfico de la función f de ecuación y = 2x



Función lineal o de proporcionalidad directa.

Observa las aplicaciones o funciones siguientes:

$\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$ $\quad y = 2x$ $\qquad$ $\mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}$ $\quad y = 5x$ $\qquad$ $\mathbb{Q}^+ \xrightarrow{h} \mathbb{Q}^+$ $\quad y = \frac{1}{2}x$

Las dos primeras son de variable entera y la tercera es una aplicación de variable racional positiva.

Todas estas funciones tienen una ecuación de la forma $y = a \cdot x$, donde **a** es un número distinto de cero. Estas funciones se llaman **funciones lineales** o de **proporcionalidad directa,** y el número **a se llama constante de proporcionalidad.**

Observa que en todas ellas la imagen de cero es el cero:

$$f(0) = 2 \cdot 0 = 0$$
$$g(0) = 5 \cdot 0 = 0$$
$$h(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

Por eso la representación gráfica de una función lineal está formada por puntos que están situados sobre una recta que pasa por el origen.

En la figura se ha representado el gráfico de la función lineal **f** de ecuación $y = 2x$.

La función de ecuación $y = a \cdot x$, que asocia a cada número x el resultado de multiplicarlo por un número a distinto de cero, se llama función o aplicación lineal o también función de proporcionalidad directa. El número que es distinto de 0 se llama constante de proporcionalidad.

TABLA DE PROPORCIONALIDAD

	−3	−2	−1	0	1	2	3
×2	−6	−4	−2	0	2	4	6

Conjuntos de números proporcionales.

Observa de nuevo la tabla de valores, que ahora se ha escrito de forma horizontal.

Se puede pasar de los números de la primera fila a los de la segunda multiplicando por 2; por eso se dice que los conjuntos de números:

−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3 y −6, −4, −2, 0, 2, 4, 6

son directamente proporcionales y que esta tabla es una tabla de **proporcionalidad.**

Dos conjuntos de números son proporcionales o directamente proporcionales cuando se puede pasar de un conjunto al otro multiplicando por un número distinto de cero.

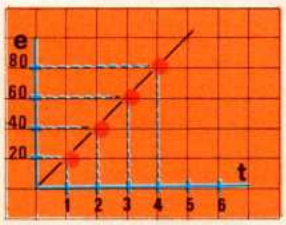
Variables proporcionales.

Función lineal de ecuación $e = 20 \cdot t$

Tabla de valores de la función $e = 20 \cdot t$

(t) tiempos	1	2	3	4	5
(e) espacios	20	40	60	80	100

Gráfico de la función $e = 20 \cdot t$



Supongamos que un tractor se mueve a una velocidad constante de 20 kilómetros cada hora.

Se dice que este móvil lleva un movimiento uniforme.

Si se designa por **t** el tiempo y por **e** el espacio recorrido se obtiene la función lineal o función de proporcionalidad de ecuación $e = 20 \cdot t$.

En esta ecuación **t** es la variable independiente y **e** la variable dependiente. Las variables **t** y **e** son **directamente proporcionales,** y 20 es la constante de proporcionalidad.

Si $t = 1$, entonces $e = 20 \cdot 1 = 20$.

Esto significa que la constante de proporcionalidad es la imagen del 1.

Observa el gráfico de la función, en la que se han utilizado unidades de distintas longitudes en los ejes.

Observa en la tabla de valores de la función que los espacios son proporcionales a los tiempos.

Dos variables x e y son proporcionales cuando sus valores se corresponden en una función lineal $y = ax$.

1. Calcula y comprueba:

En las funciones lineales de ecuaciones $f(x) = 2x$, $g(x) = 5x$ y $h(x) = \frac{1}{2}x$,

calcula $f(1)$, $g(1)$ y $h(1)$ y comprueba que la constante de proporcionalidad es en cada caso la imagen del 1.

2. Lee atentamente y calcula:

Un coche sigue un movimiento uniforme con una velocidad constante de 80 km/h.

a) Escribe la función lineal que describe este movimiento uniforme representando por **t** la variable independiente en horas y por **e** el espacio recorrido en kilómetros.

b) Calcula el espacio recorrido en 6 horas: $e = 80 \cdot \ldots = \ldots$ km.

c) Calcula el espacio recorrido en 8 h, 9 h, 10 h.

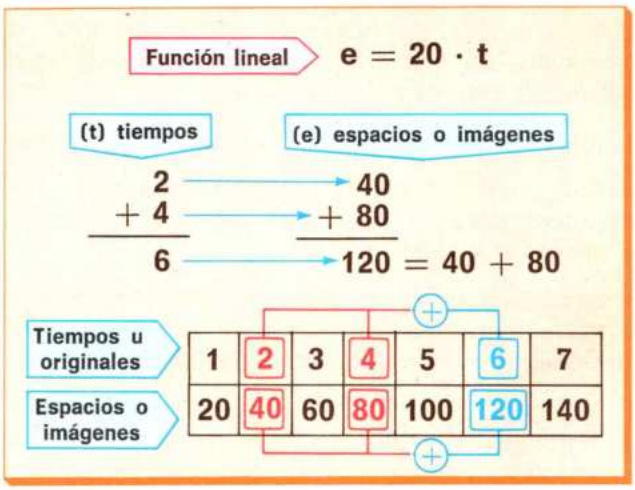
d) Completa en tu cuaderno la tabla:

Tiempos	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Espacios	...	...	...	...	...	...	...	...	...

e) ¿Por qué número hay que multiplicar los números de la primera fila de la tabla para obtener los de la segunda?

f) ¿Cómo son los conjuntos o series de números de la primera fila y los de la segunda?

5. Propiedades fundamentales



Correspondiente de una suma.

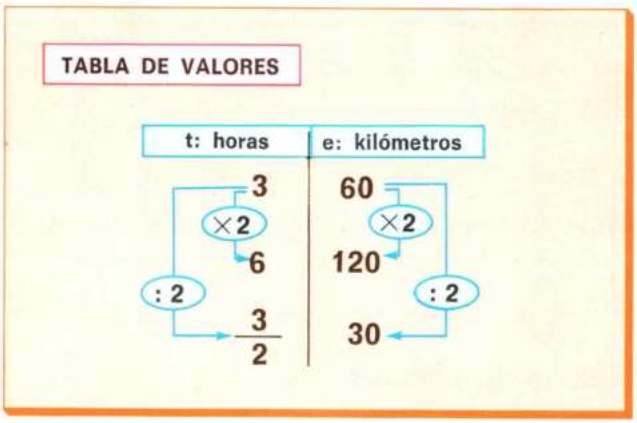
Consideremos de nuevo el ejemplo del tractor que se mueve con la velocidad constante de 20 km/h (movimiento uniforme). El movimiento viene definido por la aplicación lineal $\mathbf{e = v \cdot t}$.

- En 2 horas el tractor recorre → $20 \times 2 = 40$ km.
- En 4 horas el tractor recorre → $20 \times 4 = 80$ km.
- En $(2 + 4)$ horas, es decir, en 6 horas → el tractor recorre $20 \times 6 = 120 = 40 + 80$ km.

En general, si en la aplicación lineal $\mathbf{y = a \cdot x}$ los valores x_1, x_2 se corresponden con los valores y_1, y_2, entonces a la suma $x_1 + x_2$ le corresponde la suma $y_1 + y_2$.

Esta importante propiedad la tienen las funciones lineales y solamente ellas.

En una función lineal o de proporcionalidad directa, si a los números x_1, x_2 les corresponden, respectivamente, y_1, y_2 entonces a la suma $x_1 + x_2$ le corresponde la suma $y_1 + y_2$. También se suele decir que en una función lineal la imagen de la suma de dos números es la suma de las imágenes de estos números.



Correspondiente del producto de un número por un valor de la variable.

En 3 horas el tractor recorre → $20 \times 3 = 60$ km.

¿Cuánto recorre en doble tiempo? ¿Y en la mitad de tiempo?

- En doble tiempo, $(3 \times 2$ horas), el tractor recorre doble espacio, $20 \times 6 = 120$ km $= 2 \times 60$ km.
- En la mitad de tiempo, $\frac{3}{2}$ horas, el tractor recorre la mitad de espacio, $20 \cdot \frac{3}{2} = 30 = \frac{60}{2}$
- a doble tiempo corresponde doble espacio;
- a mitad de tiempo corresponde mitad de espacio;
- a triple tiempo corresponde triple espacio.

En una función lineal o de proporcionalidad directa, si al número x_1 le corresponde el número y_1 entonces al producto mx_1 le corresponde el producto my_1.

1. Completa la siguiente tabla correspondiente a la función lineal f de ecuación $y = 6x$:

x	−3	−2	−1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Escribe las razones o cocientes entre cada imagen y su original y comprueba que forman una serie de razones iguales: $\frac{-18}{-3} = \frac{-12}{-2} = \text{——} = \text{——} = \text{——} = \text{——}$

¿Cuál es el valor de cada uno de estos cocientes?

Actividades

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

1. Dada la función lineal $f(x) = -10x$, calcula:

① $f(2)$ ③ $f(3)$ ⑤ $f(0)$ ⑦ $f(6)$ ⑨ $f(8)$ ⑪ $f(10)$

② $f(-2)$ ④ $f(-3)$ ⑥ $f(1)$ ⑧ $f(-6)$ ⑩ $f(-8)$ ⑫ $f(-10)$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. En la función de proporcionalidad $y = 15x$ ¿cuál es el valor del cociente entre una imagen y su correspondiente original $\frac{y}{x}$?

2. En una función lineal $f(x) = ax$, la imagen de -3 es -21. ¿Cuánto vale la constante de proporcionalidad?

3. Dibuja los gráficos de las funciones lineales de variable entera de ecuaciones:

a) $y = x$ b) $y = -x$ c) $y = 3x$ d) $y = -3x$

4. Dibuja los grafos de las funciones de variable entera de ecuaciones:

a) $y = x + 2$ b) $y = -x + 2$ c) $y = 3x + 2$ d) $y = -3x + 2$

Compara los gráficos de estas funciones, llamadas **funciones afines**, con los gráficos del ejecicio **3.**

5. Dada la función lineal $f(x) = ax$, la imagen de 1 es 3, es decir, $f(1) = 3$. Calcula **a** y después calcula $f(2)$, $f(3)$ y $f(5)$.

6. Considera la función lineal **f** de ecuación $y = 15x$ y completa en tu cuaderno la tabla siguiente:

x	-1	-2	-3	-4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y = 15x$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

a) ¿Es ésta una tabla de proporcionalidad?

b) ¿Por qué número hay que multiplicar los números de la primera fila para obtener los de la segunda?

c) Escribe los cocientes entre cada imagen y su correspondiente original.

d) Comprueba que el cociente $\frac{y}{x}$ es constante. ¿Cuánto vale el cociente $\frac{y}{x}$?

e) Calcula $f(2)$ y $f(3)$. ¿Se verifica $f(2 + 3) = f(2) + f(3)$?

7. Considera la función lineal **g** de ecuación $y = -12x$.

Calcula:

a) $g(4)$ b) $g(6)$ c) ¿Es $g(10) = g(4) + g(6)$?

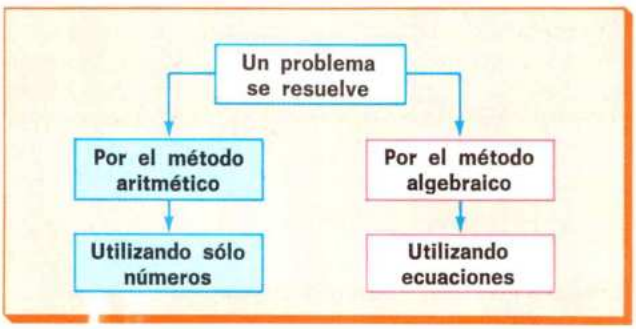
8. Se sabe que **f** es una aplicación lineal y que $f(x_1) = 6$. Halla $f(3x_1)$.

9. En una aplicación lineal **f** se sabe que $f(2) = -4$ y $f(3) = -6$. ¿Cuánto vale $f(5)$?

10. Si las variables **x** e **y** están relacionadas por la función $y = 7x$ ¿son directamente proporcionales? ¿Y si están relacionadas por la función $y = 7x + 1$?

TEMA 10 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES

1. Método algebraico para la resolución de problemas. I



Método aritmético y método algebraico.

Cuando un problema se resuelve utilizando sólo números se dice que se emplea el **método aritmético.**

Cuando un problema se resuelve utilizando ecuaciones se dice que se emplea el **método algebraico.**

PROBLEMA 1

Lola ha comprado tres cuartos de kilo de carne, que le han costado 600 ptas.

¿Cuánto vale 1 kilogramo de carne?

MÉTODO ARITMÉTICO

- Si 3 cuartos valen 600 ptas.,
- 1 cuarto valdrá $600 : 3 = 200$ ptas.,
- y 1 kilo, que tiene 4 cuartos, valdrá $200 \times 4 = 800$ ptas.

MÉTODO ALGEBRAICO

Designemos por **x** el valor de 1 kg de carne.

El valor de $\frac{3}{4}$ de kilo será $\frac{3}{4} \cdot x$ ptas.

El valor de $\frac{3}{4}$ de kilo de carne (según el enunciado) es 600 ptas.

Así se tiene esta ecuación:

$$\frac{3}{4} \cdot x = 600 \text{ ptas.}$$

Resuelta esta ecuación da $x = 800$.

1 kilogramo de carne vale 800 ptas.

PROBLEMA 2

¿Cuál es el número entero que al sumarle 5 resulta un número 6 veces mayor que el que resulta al restarle 5?

MÉTODO ARITMÉTICO

Probemos con 5	$5+5=10$ $(5-5)\cdot 6=0$	$10\neq 0$ **No vale el 5.**
Probemos con 6	$6+5=11$ $(6-5)\cdot 6=6$	$11\neq 6$ **No vale el 6.**
Probemos con 7	$7+5=12$ $(7-5)\cdot 6=12$	$12=12$ **Sí vale el 7.**

MÉTODO ALGEBRAICO

Designemos por **x** el número pedido.

Sumamos 5 ⟶ $x + 5$

Restamos 5 ⟶ $x - 5$

Del enunciado resulta esta ecuación:

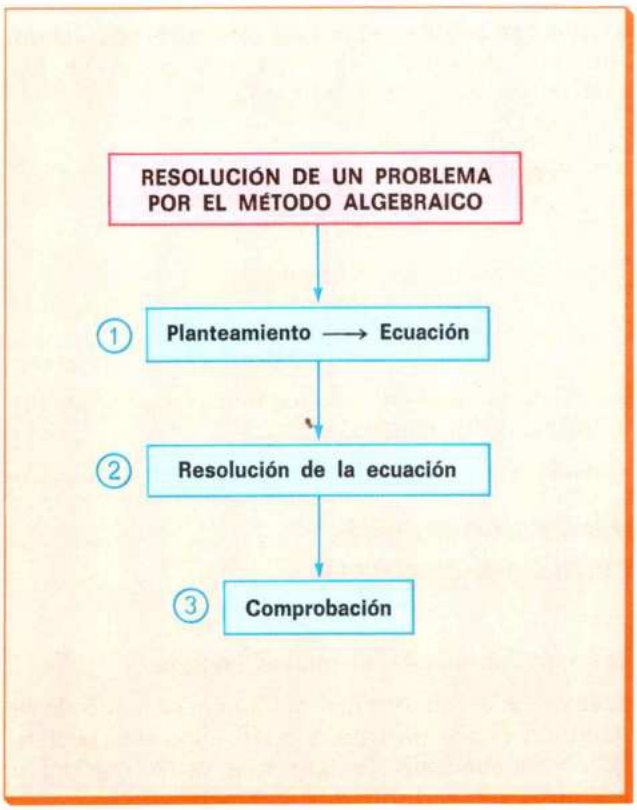
$$x + 5 = 6 \cdot (x - 5)$$

Resolviendo esta ecuación resulta $x = 7$.

El número pedido es 7.

En el **PROBLEMA 1** no se observa que el método algebraico aporte ninguna ventaja, pero en el **PROBLEMA 2** parece que es el único camino razonable para resolverlo.

2. Método algebraico para la resolución de problemas. II



Planteamiento, resolución y comprobación.

Para resolver un problema por el método algebraico se siguen los siguientes pasos:

1. **Planteamiento.** Plantear un problema es poner en forma de ecuación la información o condiciones contenidas en el enunciado.
   Para plantear un problema se designa con una letra (por ejemplo, **x** o **t**) el número que se busca, o sea, la incógnita.
   Después se somete la incógnita a las operaciones que indica el enunciado. Se procede como se haría para comprobar si un número conocido cumple la condición o condiciones del enunciado. Así resulta una ecuación.
2. **Resolución.** La ecuación que resulte, si es de primer grado, se resuelve por la forma que ya conocemos.
3. **Comprobación.** Después de resuelta la ecuación hay que comprobar si la solución responde a las condiciones del enunciado.

Ejemplo

Un padre tiene 26 años más que su hijo. Cuando pasen dos años la edad del padre será triple que la del hijo. ¿Qué edades tienen hoy el padre y el hijo?

1 PLANTEAMIENTO

- Edad del hijo ahora: x
- Edad del padre ahora: $x + 26$
- Edad del hijo dentro de 2 años: $x + 2$
- Edad del padre dentro de 2 años: $x + 26 + 2 = x + 28$

Como la edad del padre será triple que la del hijo, se obtiene la siguiente ecuación:

$$x + 28 = 3(x + 2)$$

2 RESOLUCIÓN

$x + 28 = 3(x + 2)$ Ecuación

- $x + 28 = 3x + 6$
- $28 - 6 = 3x - x$
- $22 = 2x$
- $x = \frac{22}{2} = 11$

Solución: $x = 11$

Edad del hijo ahora: 11 años

3 COMPROBACIÓN

- Edad del hijo ahora: 11 años.
- Edad del padre ahora: $11 + 26 = 37$ años.
- Edad del hijo dentro de 2 años: $11 + 2 = 13$ años.
- Edad del padre dentro de 2 años: $37 + 2 = 39$ años.

Se comprueba que la edad del padre será triple que la del hijo:

$$39 = 3 \times 13$$

1. Resuelve estos problemas:

A. ¿Qué número hay que sumar a los dos términos de la fracción $\frac{7}{13}$ para obtener una fracción equivalente a $\frac{2}{3}$?

Sugerencia En la ecuación $\frac{7 + x}{13 + x} = \frac{2}{3}$ aplica la propiedad de las fracciones equivalentes de ser iguales los productos cruzados.

B. Si al triple de un número se le resta 7 se obtiene el doble de ese número. ¿Cuál es el número?

3. Problemas sobre móviles. I

Movimiento uniforme.

Fórmulas del movimiento uniforme

$$e = v \cdot t \qquad v = \frac{e}{t} \qquad t = \frac{e}{v}$$

UNIDADES

Espacio	Tiempo	Velocidad
km	h	km/h
m	s	m/s
cm	s	cm/s

Para plantear los problemas sobre móviles que llevan un movimiento uniforme (velocidad constante) se utilizan las fórmulas de este movimiento.

La fórmula fundamental es:

espacio = velocidad × tiempo

$$e = v \cdot t$$

De aquí resultan estas dos fórmulas:

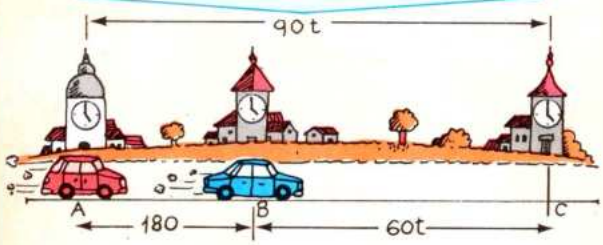
$$v = \frac{e}{t} \qquad t = \frac{e}{v}$$

Se ha de procurar que se correspondan las unidades como se indica en el cuadro.

Problemas sobre móviles con movimiento uniforme.

MÓVILES EN EL MISMO SENTIDO

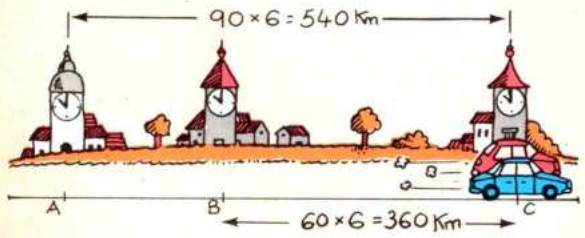
Esquema y planteamiento del problema



Planteamiento

$$\underbrace{AC}_{\downarrow} = \underbrace{AB}_{\downarrow} + \underbrace{BC}_{\downarrow}$$

$$90 \cdot t = 180 + 60 \cdot t$$



PRIMER CASO

Cuando los móviles van en el mismo sentido.

Dos ciudades A y B distan entre sí 180 km. A las 5 de la mañana, sale un coche de cada ciudad y los dos coches van en el mismo sentido. El que sale de A marcha a 90 km/h, y el que sale de B va a 60 km/h.

¿Al cabo de cuánto tiempo un coche alcanzará al otro? ¿A qué hora se encontrarán? ¿Qué distancia habrá recorrido cada coche?

En el esquema, el punto **C** representa el punto de encuentro. Designemos por **t** la incógnita, que es el tiempo transcurrido hasta producirse el encuentro.

Hasta el momento del encuentro los coches habrán recorrido las siguientes distancias:

- El coche que sale de A habrá recorrido $AC = 90 \cdot t$.
- El coche que sale de B habrá recorrido $BC = 60 \cdot t$.

Observa en la figura que $AC = AB + BC$, es decir:

$$90 \cdot t = 180 + 60 \cdot t$$

Ahora se resuelve esta ecuación:

$$90 \cdot t - 60 \cdot t = 180$$

$$30t = 180 \rightarrow t = \frac{180}{30} = 6 \text{ horas}$$

A las 5 + 6 = 11 horas de la mañana se encontrarán.

La distancia del punto de encuentro a ambas ciudades es:

$$AC = 90 \times 6 = 540 \text{ km y } BC = 60 \times 6 = 360 \text{ km}$$

1. Resuelve el siguiente problema:

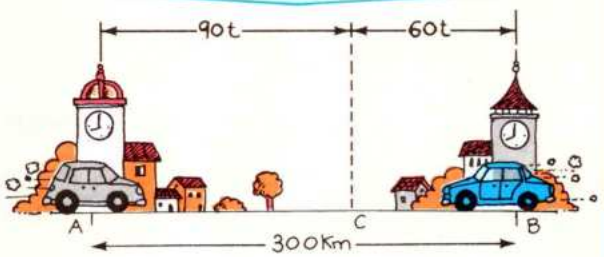
Dos ciudades A y B distan entre sí 60 km. A la misma hora salen de ambas dos coches en el mismo sentido. El que sale de A, a 120 km/h, y el que sale de B, a 90 km/h.

¿Al cabo de cuánto tiempo se encontrarán?

4. Problemas sobre móviles. II

MÓVILES EN SENTIDO CONTRARIO

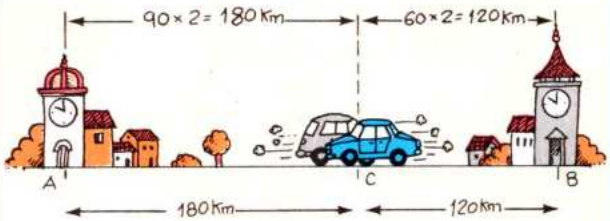
Esquema y planteamiento del problema



Planteamiento

$$\underbrace{AC}_{90\cdot t} + \underbrace{BC}_{60\cdot t} = 300$$

$$90 \cdot t + 60 \cdot t = 300$$



SEGUNDO CASO

Cuando los móviles van en sentido contrario.

Dos ciudades A y B distan entre sí 300 km.

A las 8 de la mañana parte de la ciudad A un coche hacia la ciudad B con una velocidad de 90 km/h, y de la ciudad B parte otro coche hacia la ciudad A con una velocidad de 60 km/h.

¿Cuánto tiempo tardarán en encontrarse? ¿A qué hora se encontrarán? ¿A qué distancia de cada ciudad se encontrarán?

Como en el problema anterior, sea **C** el punto de la carretera en que se encuentran y sea **t** el tiempo que tardan en encontrarse.

Hasta el momento del encuentro los coches habrán recorrido:

- El coche que sale de A habrá recorrido $\mathbf{AC} = 90 \cdot \mathbf{t}$.
- El coche que sale de B habrá recorrido $\mathbf{BC} = 60 \cdot \mathbf{t}$.

Observa en la figura que la suma de los espacios recorridos por ambos coches es 300 km.

Es decir:
$$\underbrace{AC}_{90\cdot t} + \underbrace{BC}_{60\cdot t} = 300$$

Ahora se resuelve esta ecuación: $90 \cdot \mathbf{t} + 60 \cdot \mathbf{t} = 300$,

de donde: $150 \cdot \mathbf{t} = 300$

$$\mathbf{t} = \frac{300}{150} = \mathbf{2\ horas}$$

A las 8 + 2 = 10 horas de la mañana se encontrarán.

La distancia del punto de encuentro a ambas ciudades es:

$AC = 90 \times 2 = 180$ km y $BC = 60 \times 2 = 120$ km

1. Resuelve estos problemas:

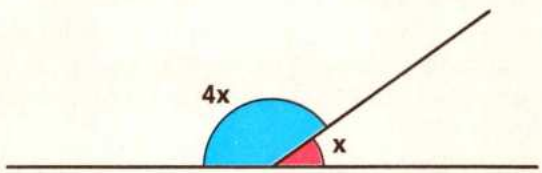
A. Dos ciudades A y B distan entre sí 360 km. De la ciudad A sale un coche hacia B con una velocidad de 70 km/h, y de B parte un camión hacia A con una velocidad de 50 km/h.
¿Cuánto tiempo tardarán en encontrarse?
¿Qué distancia hay del punto de encuentro a ambas ciudades?

B. Un ciclista sale de una ciudad A a una velocidad de 25 km/h. Dos horas más tarde sale de A en su persecución un motorista a 50 km/h.
¿A qué distancia de la ciudad le alcanzará?

C. Dos móviles se mueven hacia su encuentro, uno a 120 km/h y el otro a 80 km/h. Si la distancia que les separa es de 800 km ¿cuánto tardarán en encontrarse?

D. Un coche sale de una ciudad A a la velocidad de 90 km/h.
Tres horas más tarde sale de la misma ciudad otro coche en persecución del primero con una velocidad de 120 km/h.
¿Cuánto tiempo tardará en alcanzarlo?
¿A qué distancia de la ciudad A se producirá el encuentro?

5. Otros problemas



Planteamiento $4x + x = 180°$

PROBLEMA 1

Dos ángulos adyacentes son tales que uno es cuatro veces mayor que el otro.

¿Cuántos grados mide cada ángulo?

Observa la figura. Si designamos por **x** lo que mide el ángulo menor, el mayor medirá **4x**.

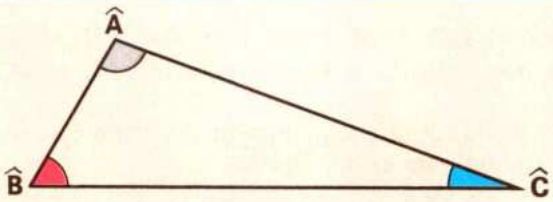
El planteamiento es:

$$4x + x = 180°$$

$5x = 180° \rightarrow x = \dfrac{180°}{5} = 36°$ mide el ángulo menor.

El ángulo menor mide 36°.

El ángulo mayor mide 36° × 4 = 144°.



$\hat{C} \longrightarrow x$

$\hat{B} \longrightarrow x + 40$

$\hat{A} \longrightarrow x + 40 + 40$

Planteamiento $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

$x + 80 + x + 40 + x = 180°$

PROBLEMA 2

Halla el valor de los tres ángulos de un triángulo sabiendo que B mide 40° más que $\hat{C}$ y que $\hat{A}$ mide 40° más que $\hat{B}$.

Si llamamos **x** a la medida de $\hat{C}$, la medida de $\hat{B}$ será $x + 40°$, y la medida de $\hat{A}$ será $x + 40° + 40° = x + 80°$.

Como $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$,

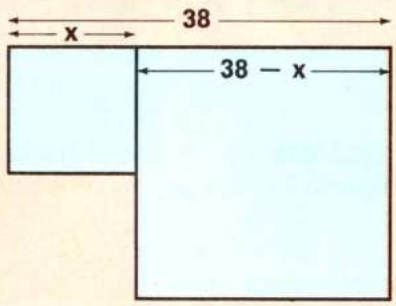
$x + 80° + x + 40° + x = 180°$

se tiene esta ecuación:

$$x + x + x = 180° - 80° - 40°$$

$$3x = 60° \rightarrow x = \frac{60°}{3} = 20°$$

$\hat{C} = 20°$; $\hat{B} = 20° + 40° = 60°$; $\hat{A} = 60° + 40° = 100°$



Planteamiento $(38 - x)^2 - x^2 = 532$

PROBLEMA 3

La suma de dos números es 38, y la diferencia de sus cuadrados es 532.

¿Cuáles son estos números?

Si **x** es el número menor, $38 - x$ será el mayor.

Planteamiento $(38 - x)^2 - x^2 = 532$

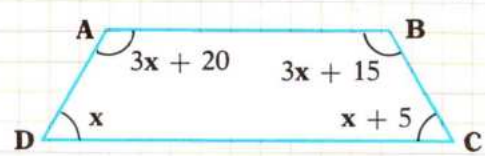
1. Se desarrolla el cuadrado $1.444 + x^2 - 76x - x^2 = 532$.
2. Se trasponen términos y se simplifica:
$$-76x = 532 - 1.444 = -912$$
3. Se despeja **x**: $x = \dfrac{-912}{-76} = 12$.

El número menor es 12.

El número mayor es 38 − 12 = 26.

1. Calcula cada uno de los ángulos del trapecio ABCD con las condiciones que se indican en la figura.

Sugerencia Recuerda que la suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360°.



Actividades

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Si al triple de un número se le resta 36 resulta 72. ¿Cuál es el número?

2. Si al doble de un número se le resta su mitad resulta 54. ¿Cuál es el número?

3. Si a un número se le suma su doble y su triple resulta 90. ¿Qué número es ése?

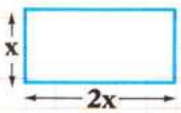
4. Si a un número se le resta 1 el resultado es dos veces mayor que restándole 10.
¿Qué número es?

5. He andado la tercera parte del camino y aún me quedan 360 m por recorrer.
¿Qué longitud tiene el camino?

6. Un corral tiene conejos y gallinas; en total 35 cabezas y 116 patas.
¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay?

7. En un triángulo **ABC** el ángulo $\widehat{B}$ mide doble que el $\widehat{C}$ y el ángulo $\widehat{A}$ mide el triple que el $\widehat{C}$.
¿Cuánto mide cada uno de los ángulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$?

8. La base de un rectángulo es doble que su altura.
¿Cuáles son sus dimensiones si el perímetro mide 30 cm?



9. Averigua los ángulos del paralelogramo **ABCD** con las condiciones que se indican en la figura.

Recuerda que los ángulos adyacentes son suplementarios.

10. Un peatón recorre 22 kilómetros en 4 horas a velocidad constante.
¿Cuál es esta velocidad en km/h?

11. Dos ciudades A y B distan entre sí 600 km. De A parte un automóvil hacia B con una velocidad de 40 km/h, y de B parte otro hacia A a 60 km/h.
¿Cuánto tiempo tardarán en cruzarse?

12. Un camión sale de una ciudad A a una velocidad de 40 km/h.
Una hora más tarde sale de A en la misma dirección y sentido un coche a 60 km/h.
¿Cuánto tiempo tardará en alcanzarle?
¿Cuál es la distancia de la ciudad A al punto donde se encuentran?

13. Dos viajeros, de los cuales uno recorre 192 metros en 3 minutos y el otro 56 metros por minuto, parten uno hacia el otro de dos estaciones distantes 62.400 metros.
Pero el segundo sale 2 horas y media después que el primero.
¿Cuánto tardarán en encontrarse?

TEMA 11 MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

1. Proporciones. I

Razones.

RAZONES

$\frac{3}{5}, \frac{0,5}{4}, \frac{2}{3}, \frac{a}{b}$

Términos de una razón

$\frac{a}{b}$ ← Antecedente

$\frac{a}{b}$ ← Consecuente

Se llama **razón** de dos números al cociente indicado de dichos números.

Por ejemplo: $\frac{3}{5}, \frac{0,2}{5}, \frac{4}{2,5}, \frac{0,6}{2}$, etc.

No hay que confundir razón con fracción.

Si $\frac{a}{b}$ es una fracción, entonces **a** y **b** son números enteros con $b \neq 0$, mientras que en la razón $\frac{a}{b}$ los números **a** y **b** pueden ser decimales.

Los términos de una razón son el **antecedente** y el **consecuente.**

Proporción.

Aplicación: $y = 0,5 \cdot x$

Originales	Imágenes
4	2
6	3

(4 → 2: $\times 0,5$; 6 → 3: $\times 0,5$)

PROPORCIÓN

$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ — Medios: **c**; Extremos: **a**, **d**

Consideremos la aplicación lineal $y = 0,5 \cdot x$.

Si $x = 4$, entonces $y = 0,5 \times 4 = 2$

Si $x = 6$, entonces $y = 0,5 \times 6 = 3$

Observa que la razón formada por los originales es igual a la razón formada por las imágenes:

Originales: $\frac{4}{6}$ = Imágenes: $\frac{2}{3}$

También se observa que en cada caso la razón entre una imagen y su original es constante: $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$

La igualdad de dos razones se llama **proporción.**

En la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ los números **a** y **d** se llaman **extremos,** y los números **b** y **c** se llaman **medios.**

Serie de razones iguales.

TABLA DE PROPORCIONALIDAD

Originales	4	6	8	9
Imágenes	2	3	4	4,5

Consideremos de nuevo la aplicación lineal $y = 0,5 \cdot x$.

Observa la tabla en la que se han escrito cuatro originales y sus respectivas imágenes.

Como la razón entre las imágenes y sus originales es constante, se tiene la siguiente serie de igualdades, que se llama **serie de razones iguales:**

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{4,5}{9}$$

Esta serie expresa la proporcionalidad que existe entre las imágenes y los originales de una aplicación lineal.

Razón es el cociente indicado de dos números.
Proporción es la igualdad de dos razones.

Propiedades de las proporciones.

Proporciones	Producto de los medios	Producto de los extremos
$\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$	$3 \cdot 8 = 24$	$4 \cdot 6 = 24$
$\frac{5}{20} = \frac{2,5}{10}$	$20 \cdot 2,5 = 50$	$5 \cdot 10 = 50$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ → $a \cdot d = b \cdot c$

CÁLCULO DE UN TÉRMINO EN UNA PROPORCIÓN

$\frac{5}{7} = \frac{15}{x}$ → $5 \cdot x = 7 \cdot 15$ → $x = \frac{7 \cdot 15}{5} = 21$

PRIMERA PROPIEDAD

En la proporción $\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$ y en la proporción $\frac{5}{20} = \frac{2,5}{10}$ se observa que el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

En general, en una proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se verifica $a \cdot d = b \cdot c$.

Esta propiedad permite calcular un término desconocido en una proporción.

Calculemos el extremo **x** en la proporción $\frac{5}{7} = \frac{15}{x}$:

$$5 \cdot x = 7 \cdot 15,$$

de donde

$$x = \frac{7 \cdot 15}{5} = 21$$

En una proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

Suma de antecedentes / Suma de consecuentes = cualquiera de las razones

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ → $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ → $\frac{1+2+3}{2+4+6} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ → $\frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$

SEGUNDA PROPIEDAD

Consideremos la proporción $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ y formemos la razón siguiente:

$$\frac{\text{Suma de antecedentes}}{\text{Suma de consecuentes}} = \frac{2+6}{3+9} = \frac{8}{12}$$

Se observa que esta razón forma proporción con las otras dos razones: $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$; $\frac{6}{9} = \frac{8}{12}$

Lo mismo ocurre en una serie de razones iguales:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$

En general, en una serie de razones iguales

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

se verifica que: $\frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$

En una proporción o en una serie de razones iguales, la suma de los antecedentes dividida entre la suma de los consecuentes es igual a una cualquiera de las razones.

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

(Tienes que calcular el término desconocido en cada proporción.)

a) $\frac{4}{10} = \frac{x}{60}$ b) $\frac{9}{12} = \frac{12}{x}$ c) $\frac{8}{32} = \frac{2}{x}$ d) $\frac{5}{3} = \frac{x}{21}$

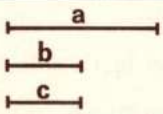
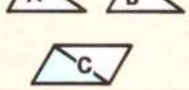
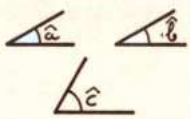
e) Escribe la proporción $\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$ de cuatro formas.

Cantidades de magnitud.

Los segmentos tienen longitud, los recipientes tienen capacidad, los cuerpos tienen masa.

La longitud, la capacidad y la masa son **magnitudes.**

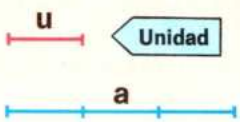
Observa el siguiente cuadro, en el que se distinguen magnitudes y cantidades.

Magnitud	Cantidades	Hay cantidades iguales	Las cantidades se suman	Las cantidades se comparan	Las cantidades se miden
Longitud		$b = c$	$b + c$	$b < a$	$a \to 2$ cm $b \to 1$ cm $c \to 1$ cm
Superficie		Superficie (**A**) = superficie (**B**).	Superficie (**A**) + superficie (**B**) = superficie (**C**).	Superficie (**A**) < superficie (**C**).	Superficie (**A**) = $2 \times 1 = 2$ cm^2
Amplitud		$\hat{a} = \hat{b}$	$a + b$	$\hat{a} < \hat{c}$	$\hat{a} \to 30°$

Una magnitud es un conjunto en el que se definen una igualdad, una suma y una ordenación. Los elementos de una magnitud se llaman cantidades.

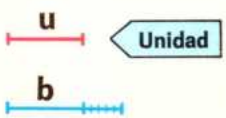
Medida de una cantidad.

PRIMER CASO



$a = 3 \cdot u$

SEGUNDO CASO



$$b = 1 + \frac{5}{10} = 1{,}5 \text{ u}$$

Para medir una cantidad de magnitud se elige una cantidad de la misma especie (homogénea) llamada **unidad** y se compara la cantidad a medir con dicha unidad. Se pueden presentar dos casos principales.

PRIMER CASO

Cuando la cantidad a medir es un múltiplo de la unidad.

Ejemplo El segmento **a** contiene exactamente tres veces el segmento unidad **u.** Escribimos:

$a = 3 \cdot u$

SEGUNDO CASO

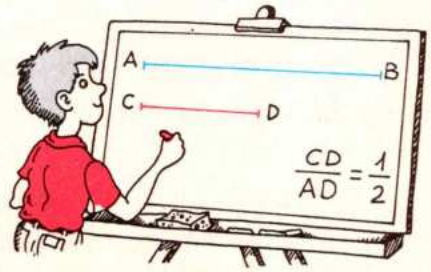
Cuando la cantidad a medir no es múltiplo de la unidad, pero sí de algún divisor de la unidad.

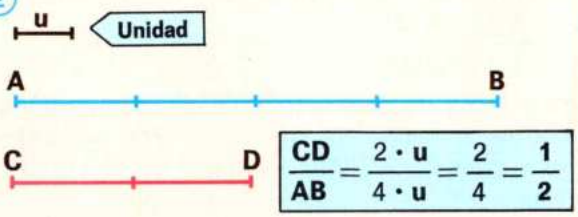
Así el segmento **b** contiene 1 vez el segmento **u** y 5 décimas partes del mismo:

$$a = \frac{15}{10} \cdot u = 1{,}5 \text{ u}$$

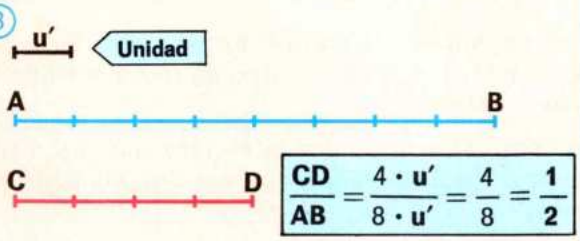
4. Razón de dos cantidades. Propiedad

Razón de dos cantidades homogéneas.

① 

② 

$$\frac{CD}{AB}=\frac{2\cdot u}{4\cdot u}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

③ 

$$\frac{CD}{AB}=\frac{4\cdot u'}{8\cdot u'}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

① Pablo lleva el segmento **CD** dos veces sobre el segmento **AB**.

La razón entre los segmentos **CD** y **AB** es un medio:

$$\frac{CD}{AB}=\frac{1}{2}$$

② Si Pablo mide los segmentos **AB** y **CD** con la unidad **u** obtiene los resultados siguientes:

$$AB = 4\cdot u$$
$$CD = 2\cdot u$$

Entonces la razón entre el segmento **CD** y el segmento **AB** es también un medio:

$$\frac{CD}{AB}=\frac{2\cdot u}{4\cdot u}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

③ Si ahora Pablo utiliza como unidad de medida el segmento **u'** resulta:

$$CD = 4\ u' \quad \text{y} \quad AB = 8\ u'$$

y la razón $\frac{CD}{AB}$ sigue valiendo un medio:

$$\frac{CD}{AB}=\frac{4\cdot u'}{8\cdot u'}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

Razón de dos cantidades homogéneas es el número que expresa la medida de la primera cuando se toma la segunda como unidad.
La razón de dos cantidades homogéneas es independiente de la unidad elegida.

1. Mide el largo y el ancho de tu mesa, una vez tomando como unidad el centímetro y otra tomando como unidad el milímetro.

Halla la razón de las medidas $\frac{\text{largo}}{\text{ancho}}$ en ambos casos.

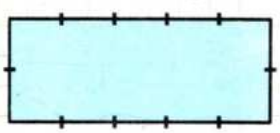
2. Mide los segmentos a y b, primero tomando como unidad u y después tomando como unidad u'.

Comprueba que la razón de los segmentos **a** y **b** es en ambos casos la misma.

3. Contesta:

¿Depende la razón de dos segmentos de la unidad que se elija para medirlos?

4. Mide con tu regla las dos dimensiones del rectángulo.



¿Cuál es la razón de la base a la altura?

5. Magnitudes directamente proporcionales. I

UNA TABLA DE MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Metros de tela	Precio
1 m	600 ptas.
2 m	1.200 ptas.
3 m	1.800 ptas.
4 m	2.400 ptas.
5 m	3.000 ptas.
6 m	3.600 ptas.

Doble

Doble

DESGRAVACIÓN EN LOS IMPUESTOS SEGÚN EL NÚMERO DE HIJOS

12.000 ptas.

24.000 ptas.

36.000 ptas.

48.000 ptas.

Concepto de magnitudes directamente proporcionales.

Observa la tabla, en la que aparecen los valores de varias cantidades de tela. Tenemos aquí dos magnitudes:

metros de tela **precio**

Se observa:

- Que la razón de dos cantidades cualesquiera de la primera magnitud y la razón de las correspondientes cantidades de la segunda magnitud forman proporción:

$$\frac{2}{3} = \frac{1200}{1800}\ ;\ \frac{2}{4} = \frac{1200}{2400}\ ,\ \text{etc.}$$

- Que los valores de una magnitud son proporcionales a los valores correspondientes de la otra, es decir, se forma una serie de razones iguales:

$$\frac{1200}{2} = \frac{1800}{3} = \frac{2400}{4} = \frac{3000}{5} = 600$$

- Que a doble número de metros corresponde doble cantidad de pesetas; a triple número de metros, triple número de pesetas, etc.

Por cumplirse estas condiciones se dice que las magnitudes «metros de tela» y «precio» son directamente proporcionales.

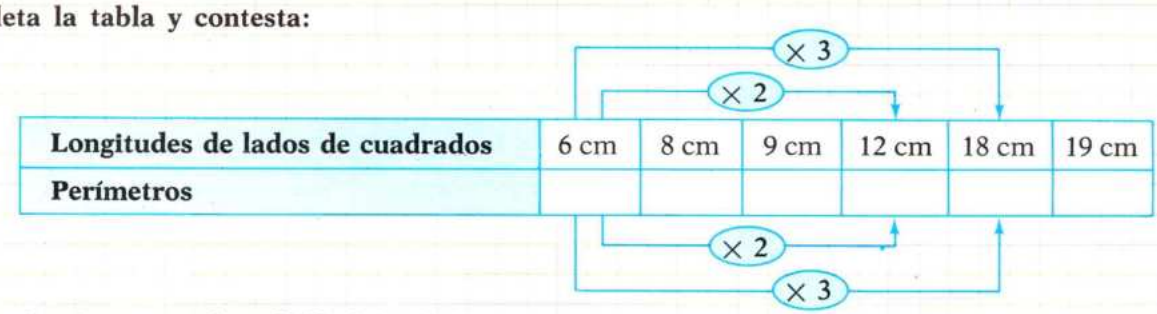
Si designamos por **x** el número de metros de tela y por **y** el valor en pesetas se tiene la aplicación lineal $y = 600 \cdot x$, que permite obtener la tabla A.

Observa también que la desgravación de los impuestos es proporcional al número de hijos.

Dos magnitudes son proporcionales cuando la razón de dos cantidades cualesquiera de una de ellas y las correspondientes en la otra es una proporción.

Dos magnitudes son directamente proporcionales si se puede establecer entre sus cantidades una aplicación lineal.

1. Completa la tabla y contesta:



a) ¿Corresponde a doble lado doble perímetro?

b) ¿Corresponde a triple lado el triple perímetro?

c) Calcula la razón de dos lados $\frac{6}{8}$ y la razón de sus perímetros correspondientes.

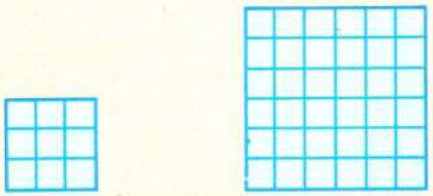
d) ¿Forman proporción estas dos razones?

e) ¿Son directamente proporcionales la longitud de los lados y los perímetros?

6. Magnitudes directamente proporcionales. II

MAGNITUDES RELACIONADAS PERO NO PROPORCIONALES

A mayor lado corresponde mayor área, pero a doble lado no corresponde doble área.



L = 3 cm → **S = (3 cm)² = 9 cm²**

L′ = 6 cm → **S′ = (6 cm)² = 36 cm²**

$\frac{3\ cm}{6\ cm}$ y $\frac{9\ cm^2}{36\ cm^2}$ **no forman proporción**

Observación importante.

Para que dos magnitudes sean directamente proporcionales no basta con que al aumentar una de ellas aumente también la otra.

Por ejemplo, sea **L** la magnitud longitud del lado de un cuadrado y **S** la magnitud superficie del mismo cuadrado.

Entonces a mayor lado corresponde mayor área, pero a doble lado no corresponde doble área.

Así, si **L** = 3 cm → su área es **S** = 9 cm².

Si **L′** = 2**L** = 6 cm → su área **S′** = 36 cm², que no es el doble de 9.

Observa también que las razones $\frac{3\ cm}{6\ cm}$ y $\frac{9\ cm^2}{36\ cm^2}$ no forman proporción.

Por tanto, las magnitudes **L** (longitud) y **S** (superficie) no son proporcionales.

1. Contesta:

a) ¿Son directamente proporcionales las magnitudes «número de obreros de una fábrica» y «número de jerseys realizados en la misma»?

b) ¿Son directamente proporcionales las magnitudes «número de bolsas de leche» y «su valor en pesetas»?

2. Resuelve estos problemas:

A. Si cada metro de cinta vale 20 ptas., la función lineal que corresponde a las magnitudes «metros de cinta» y «precio en pesetas» es $y = 20 \cdot x$.

Completa la tabla:

Metros de cinta	1	2	3	4	5	7	9	12	15
Pesetas	...	...	...	...	...	...	...	...	...

¿Cuánto valen 50 metros de cinta?

B. Por 5 kilos de arroz se pagan 400 ptas. ¿Cuánto valen 13 kg de arroz?

(Calcula en primer lugar el valor de 1 kg.) ¿Cuál es la función lineal que asocia los kilogramos de arroz con su valor?

3. Indica si son directamente proporcionales:

a) La edad de una persona y su estatura.

b) La edad de una persona y su peso.

c) La velocidad de un coche y el espacio recorrido.

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

1. Calcula **x** en las siguientes proporciones:

① $\frac{2}{4} = \frac{4}{x}$ ③ $\frac{1}{2} = \frac{3}{x}$ ⑤ $\frac{2}{3} = \frac{4}{x}$ ⑦ $\frac{2}{4} = \frac{4}{x}$

② $\frac{1}{2} = \frac{4}{x}$ ④ $\frac{5}{6} = \frac{10}{x}$ ⑥ $\frac{3}{4} = \frac{6}{x}$ ⑧ $\frac{4}{6} = \frac{6}{x}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. En la proporción $\frac{x}{3} = \frac{y}{8}$ se sabe que $x + y = 2$. Halla **x** e **y**.

Sugerencia Recuerda que en una proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se verifica $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

2. En la proporción $\frac{2}{5} = \frac{10}{25}$

a) Cambia los extremos. ¿Resulta una proporción?

b) Cambia los medios. ¿Resulta una proporción?

c) Cambia los medios y los extremos. ¿Resulta una proporción?

3. El número **x**, que forma proporción con **a**, **b** y **c**: $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, se llama **cuarto proporcional.**

Calcula el cuarto proporcional **x** en la proporción $\frac{14}{10} = \frac{21}{x}$

4. Cálculo de la media proporcional.

EJEMPLO RESUELTO

Una proporción que tiene iguales los dos medios se llama **proporción continua.**

Así la proporción $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ es una proporción continua.

En la proporción continua $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$, **x** es una media geométrica o un medio proporcional de **a** y **b**.

Como $x^2 = a \cdot b$, resulta $x = \sqrt{a \cdot b}$.

Así la media proporcional o media geométrica de 12 y 27 se calcula así: $\frac{12}{x} = \frac{x}{27}$

$$x^2 = 12 \cdot 27 = 324 \rightarrow x = \sqrt{324} = 18$$

Calcula la media proporcional entre 4 y 9 y entre 15 y 60.

5. Forma una proporción continua cuyo medio proporcional sea 8.

6. Calcula en las siguientes proporciones el valor de **x**:

a) $\frac{x}{8} = \frac{12}{32}$ b) $\frac{5}{12} = \frac{x}{36}$ c) $\frac{6}{15} = \frac{48}{x}$ d) $\frac{0{,}2}{5} = \frac{18}{x}$

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

RAZONES Y PROPORCIONES

1. El kilómetro y la milla inglesa se encuentran en una proporción de 5 a 8.

   a) Expresa en kilómetros: 48 millas, 36 millas, 42,5 millas, 100 millas.

   b) Determina la distancia en millas entre:

   - Madrid y Barcelona
   - Madrid y París
   - Santander y Cádiz.
   - Barcelona y Valencia

2. Para cocer arroz, la proporción que utiliza un cocinero es: tres partes de agua por una de arroz. Si en un olla echa:

   a) 6 tazas de agua, ¿cuántas tazas de arroz debe echar?

   b) 4 tazas y media de agua, ¿cuántas tazas de arroz debe echar?

   c) 2 tazas y media de arroz, ¿cuántas tazas de agua necesita?

   d) 5 tazas y cuarto de arroz, ¿cuántas tazas de agua necesita?

3. En una urbanización el precio de un piso es directamente proporcional a su superficie. Si el precio de un piso de 105 m^2 es de 4.200.000 ptas., calcula el precio de los pisos de 85, 120 y 140 m^2, respectivamente.

4. Entre los sueldos pagados por una empresa la razón del mínimo sueldo al máximo es $\frac{2}{7}$

   - Determina el mínimo sueldo si el máximo es de 194.000 ptas. mensuales.
   - Determina la diferencia entre el mínimo y el máximo sueldos.
   - Calcula la nueva razón del mínimo sueldo y del máximo, así como la diferencia entre ellos si:

     a) Todos los sueldos se aumentan en 5.400 ptas. mensuales.

     b) Todos los sueldos se aumentan en la décima parte de su cuantía.

     ¿En cuál de los casos anteriores la razón es mayor que $\frac{2}{7}$?

     ¿En cuál aumenta la diferencia entre el mínimo y el máximo sueldos?

5. En el país A lo que una persona paga de impuestos es directamente proporcional a sus ingresos. En el país B lo que una persona paga de impuestos es tal que la razón impuestos-ingresos es directamente proporcional a los ingresos. Tanto en A como en B la persona que obtiene 25.000 dólares anuales paga 4.500 dólares de impuestos.

   a) ¿Cuánto paga en A la persona que obtiene 40.000 dólares anuales? ¿Y la que obtiene 80.000 dólares? ¿Cuánto pagarían en B? ¿En qué país pagarían más?

   b) ¿Cuánto paga en A la persona que obtiene 20.000 dólares anuales? ¿Y la que obtiene 10.000? ¿Cuánto pagaría en B? ¿En qué país pagaría más?

   c) ¿Cuál de los dos países te parece a ti que ha establecido la forma de pagar impuestos más justa? ¿Por qué?

6. En 1982 una persona ha ganado 2.500.000 ptas. y ha pagado 475.000 ptas. de impuestos.

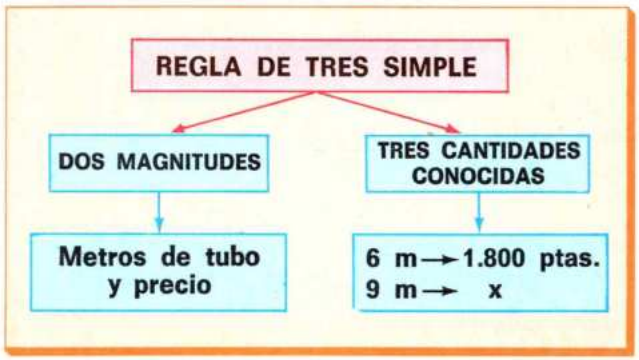
   En el mismo año otra persona ha ganado 4.125.000 ptas. y ha pagado 805.000 ptas. de impuestos.

   ¿Cuál de ellos ha pagado relativamente más impuestos?

   ¿Cuánto pagaría la segunda persona si pagase en la misma proporción que la primera?

TEMA 12 APLICACIONES DE LA PROPORCIONALIDAD DIRECTA

1. Regla de tres simple directa. I



Concepto de regla de tres simple directa.

Los 6 m de tubo de cobre valen 1.800 ptas.

¿Cuánto cuestan 9 m de tubo?

En este problema intervienen dos magnitudes (metros de tubo y precio) que son directamente proporcionales.

Se conocen tres cantidades, dos cantidades de una magnitud (metros de tubo) y una cantidad de la otra magnitud (precio).

Todos los problemas en los que, como el propuesto, se conocen tres cantidades de dos magnitudes proporcionales se llaman **problemas de regla de tres simple directa.**

Cómo se resuelven los problemas de regla de tres simple directa.

Observa dos formas de resolver el problema de los metros de tubo de cobre.

PRIMERA FORMA

Método de reducción a la unidad

Si 6 metros valen 1.800 ptas.:

- 1 metro valdrá $\frac{1800}{6} = 300$ ptas.
- Y 9 metros valdrán:

9×300 ptas. = **2.700 ptas.**

SEGUNDA FORMA

Método de las proporciones

- Si 6 m $\xrightarrow{\text{valen}}$ 1.800 ptas.

9 m $\xrightarrow{\text{valdrán}}$ **x**

Como se trata de magnitudes proporcionales, se escribe la proporción $\frac{6}{9} = \frac{1800}{x}$, de donde:

$6 \cdot x = 9 \times 1.800 \rightarrow x = \frac{9 \times 1800}{6} =$ **2.700 ptas.**

Los 9 metros de tubo cuestan 2.700 ptas.

1. Resuelve los siguientes problemas por el método de reducción a la unidad:

A. Por hacer 7 metros de muro se han pagado 5.950 ptas.
¿Cuánto deberá pagarse por 13 metros de muro?

B. Un motor extrae de una piscina 378 litros de agua en 9 minutos.
¿Cuánto tiempo tardará en extraer 2.100 litros?

2. Resuelve los siguientes problemas por el método de las proporciones:

A. Diez toneles iguales contienen 800 litros de vino.
¿Cuántos toneles son necesarios para almacenar 32.000 litros de vino?

B. En 17 cajas iguales hay 1.632 botones.
¿Cuántos botones habrá en 37 cajas como las anteriores?

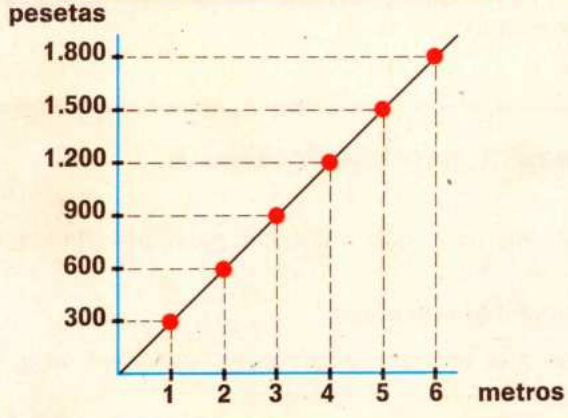
La regla de tres simple y la función lineal.

Función f de ecuación: $y = 300 \cdot x$

TABLA DE VALORES

Metros de tubo	1	2	3	4	5	6
Valor en pesetas	300	600	900	1.200	1.500	1.800

GRÁFICO DE LA FUNCIÓN $y = 300 \cdot x$



Consideremos de nuevo el problema de la página anterior.

Como 6 m de tubo valen 1.800 ptas., 1 metro vale

$$\frac{1800}{6} = 300 \text{ ptas.}$$

El conocimiento del valor correspondiente a 1 permite escribir la función lineal **f** de ecuación $y = 300 \cdot x$.

Observa que en esta función:

a) La variable **x** designa los metros de tubo y la variable **y** designa su valor en pesetas.

b) El número 300 es la imagen del 1, es decir, la constante de proporcionalidad.

Con esta función podemos encontrar el valor de los 9 m de tubo y el valor correspondiente a cualquier cantidad de metros de tubo, como indican la tabla y el gráfico.

Observa que en este caso sólo se representa el gráfico en el **primer cuadrante,** porque los metros de tubo y el precio de los mismos son siempre números positivos.

Los problemas de regla de tres simple directa se pueden resolver mediante funciones lineales.

1. Resuelve los siguientes problemas utilizando en cada uno de ellos una aplicación lineal:

A. Si 6 lapiceros han costado 90 ptas. ¿cuánto costarán 2 lapiceros? ¿Y 8? ¿Y 17?
Halla en primer lugar lo que vale 1 lapicero y escribe la ecuación de la función lineal correspondiente.

B. Una persona anda 3 km en 1/2 hora.
¿Cuánto tiempo tardará en andar 18 km?

C. Si 1/4 kilo de fresas vale 40 ptas. ¿cuánto valdrá 1 kg? ¿Y 2,5 kg? ¿Y 6 kg?
¿Cuánto gastaré en 20 días si en casa comemos 1,5 kg de fresas cada día?

D. Eva ha comprado 7 bolígrafos iguales por 231 ptas.
¿Cuántos bolígrafos podía haber comprado con 495 ptas.?

E. Un tractor lleva una velocidad constante de 24 km por hora.
¿Qué distancia habrá recorrido al cabo de 2 horas y media? ¿Y al cabo de siete horas y media?

3. Porcentajes o tantos por ciento. I

Concepto de porcentaje.

PORCENTAJES

$$\frac{5}{100} = 5\ \%$$

$$\frac{10}{100} = 10\ \%$$

Fracciones decimales de denominador 100

Las rebajas de algunos artículos, los recargos por retraso de pago, etc., se suelen expresar mediante un número que indica la rebaja o recargo que corresponde a 100 ptas.

- Si la rebaja por cada 100 ptas. de compra es 5 ptas. se escribe $\frac{5}{100}$, o bien 5 %, que se lee **«cinco por ciento».**
- Si el recargo por cada 100 ptas. de importe es 10 ptas. se escribe $\frac{10}{100}$, o bien 10 %, que se lee **«diez por ciento».**

Las fracciones decimales $\frac{5}{100} = 5\ \%$ y $\frac{10}{100} = 10\ \%$ de denominador 100 se llaman también **porcentajes** o **tantos por ciento.**

Problemas de porcentaje. Tipo A.

PROBLEMA DE PORCENTAJE

Si de 100 ptas. —rebajan→ 8 ptas.

de 450 ptas. —rebajarán→ x

PROBLEMA DE REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA

Al comprar un libro que vale 450 ptas. nos hacen un descuento del 8 %.

¿Cuánto tenemos que pagar?

La cantidad que hay que pagar es proporcional al valor del libro.

En realidad, los problemas de porcentajes son un caso particular de los problemas de regla de tres en el que una de las cantidades es siempre 100.

Observa dos formas de resolver el problema.

PRIMERA FORMA

Calculando antes la rebaja

- Si de 100 ptas. —nos rebajan→ 8
  de 450 ptas. —nos rebajarán→ x

Escribamos la proporción:

$$\frac{100}{450} = \frac{8}{x}$$

de donde $x = \frac{8 \times 450}{100} = \frac{3600}{100} = 36$ ptas.

La rebaja que nos hacen es 36 ptas. Por tanto, hemos de pagar 450 − 36 = **414 ptas.**

SEGUNDA FORMA

Calculando directamente lo que hay que pagar

Si nos descuentan el 8 por 100 hemos de pagar 92 pesetas por cada 100.

- Si de 100 —pago→ 92
  de 450 —pagaré→ x

Escribamos la proporción:

$$\frac{100}{450} = \frac{92}{x}$$

de donde $x = \frac{450 \times 92}{100} = \frac{41400}{100} = \mathbf{414\ ptas.}$

Tenemos que pagar 414 ptas.

Problemas de porcentaje. Tipo B.

① **Plantear el problema**

$$\begin{array}{l} 800 \longrightarrow 600 \\ 100 \longrightarrow x \end{array}$$

$$\frac{800}{100} = \frac{600}{x}$$

② **Despejar x**

$$x = \frac{600 \times 100}{800} = 75$$

De los 800 alumnos de un colegio, han ido de viaje 600.

¿Qué porcentaje de alumnos ha ido de viaje?

Hay que averiguar cuántos alumnos han ido de viaje por cada 100 alumnos del colegio.

De 800 alumnos del colegio $\xrightarrow{\text{van}}$ 600

de 100 $\xrightarrow{\text{irán}}$ x

Escribimos la proporción: $\frac{800}{100} = \frac{600}{x}$ y despejamos **x**:

$$x = \frac{600 \times 100}{800} = \frac{60000}{800} = 75$$

Va de viaje el 75 % de los alumnos.

El porcentaje en el comercio.

Operación del comerciante para rebajar el 13 %

Hemos comprado un frigorífico por 63.000 ptas.
El comerciante nos hace un descuento del 13 %.

¿Cuánto hemos de pagar?

Observa la operación que hace el comerciante.

La operación que hace el comerciante se justifica así:

- Por 100 ptas. de compra el cliente debe pagar $100 - 13 = 87$ ptas.
- Por 1 pta. de compra el cliente debe pagar $\frac{87}{100} = 0{,}87$ ptas.

Por 63.000 ptas. de compra el cliente debe pagar 63.000 × 0,87 ptas. = 54.810 ptas.

1. Resuelve los siguientes problemas:

A. Calcula lo que se debe pagar al hacer las siguientes compras con los descuentos que se indican:

a) Compra → 58.000; Descuento → 15 % — 58.000 × 0,85

b) Compra → 75.000; Descuento → 8 % — ...

B. Un comerciante compra en una feria objetos por valor de 900.000 ptas. Los gastos de transporte suponen el 0,5 % del total, y otros gastos varios suponen el 6 % del total.
¿A cuánto ascienden los gastos?

C. Un recipiente contiene 78 kilos de agua salada. El 2 % del peso de esta agua es sal.
¿Qué cantidad de agua contiene el recipiente?

5. Repartos directamente proporcionales. I

Concepto de repartos proporcionales.

CERRAJEROS	Luis	Ricardo	Pedro
N.º DE REJAS	1	2	3

Valor de 6 rejas ⟶ **18.000 ptas.**

Valor de 1 reja ⟶ $\frac{18.000}{6} = 3.000$

Tres cerrajeros, Luis, Ricardo y Pedro, se encargaron de hacer 6 rejas por un valor total de 18.000 ptas. Luis hizo una reja, Ricardo 2 rejas y Pedro 3 rejas.

¿Cuánto dinero corresponde a cada uno?

El valor de las rejas y el número de rejas son magnitudes directamente proporcionales.

Hay que repartir las 18.000 ptas. proporcionalmente al número de rejas que ha hecho cada cerrajero.

Cómo se resuelven los problemas de repartos directamente proporcionales.

Observa dos formas de hacer el problema de las rejas.

PRIMERA FORMA

Número de rejas — **Valor en pesetas**

$6 \longrightarrow 18.000$

$1 \longrightarrow \frac{18000}{6} = 3.000$

$2 \longrightarrow 3.000 \times 2 = 6.000$

$3 \longrightarrow 3.000 \times 3 = 9.000$

SEGUNDA FORMA

Las cantidades que corresponden a los cerrajeros son proporcionales al número de rejas que hizo cada uno (1, 2 y 3).

Si **a**, **b** y **c** son las cantidades que corresponden a Luis, Ricardo y Pedro, respectivamente, se tiene:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$$

Por una propiedad de las proporciones resulta:

$$\frac{a+b+c}{1+2+3} = \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{18000}{6}$$

A Luis le corresponde: $a = \frac{18000}{6} = 3.000$ **ptas.**

Despejando **b** y **c** resulta que:

A Ricardo corresponde **b = 6.000** y a Pedro **c = 9.000 ptas.**

Les corresponde: a Luis, 3.000 ptas.; a Ricardo, 6.000 ptas.; a Pedro, 9.000 ptas.

Reparto de 360 en partes proporcionales a 3 y 2

A 3 ⟶ $\frac{360}{3+2} \times 3 = \frac{360}{5} \times 3 = 72 \times 3 = 216$

A 2 ⟶ $\frac{360}{3+2} \times 2 = \frac{360}{5} \times 2 = 72 \times 2 = 144$

CASO PARTICULAR:

Si un número o cantidad hay que repartirlo en partes proporcionales a otros varios números que tengan un divisor común es conveniente dividir previamente los números por este divisor común.

Ejemplo Repartir 360 en partes proporcionales a 3.000 y 2.000.

Como 1.000 es divisor de 3.000 y 2.000, dividimos 3.000 : 1.000 = 3; 2.000 : 1.000 = 2 y se reparte 360 en partes proporcionales a 3 y 2.

Observa el reparto de 360 en partes proporcionales a 3 y 2.

6. Repartos directamente proporcionales. II

① m.c.m.(3, 4) = 12

Fracciones dadas | Fracciones reducidas a común denominador

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4}{12}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{12}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$$

Numeradores 4, 3, 8

②

$$\frac{3.000}{4+3+8} \times 4 = \frac{3.000}{15} \times 4 = 200 \times 4 = 800$$

$$\frac{3.000}{4+3+8} \times 3 = \frac{3.000}{15} \times 3 = 200 \times 3 = 600$$

$$\frac{3.000}{4+3+8} \times 8 = \frac{3.000}{15} \times 8 = 200 \times 8 = 1.600$$

Cómo repartir un número en partes proporcionales a varias fracciones.

Para repartir un número en partes proporcionales a otros varios números fraccionarios se reducen éstos a común denominador y se hace el reparto en partes proporcionales a los numeradores.

Observa cómo se reparte 300 en partes proporcionales a estas tres fracciones: $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}$

① Se reducen las fracciones a común denominador y así se obtienen las fracciones $\frac{4}{12}, \frac{3}{12}$ y $\frac{8}{12}$

Estas fracciones son proporcionales a los numeradores 4, 3 y 8, respectivamente, ya que se pasa de las fracciones a los números 4, 3 y 8 multiplicando por 12.

② Se reparte 3.000 en partes proporcionales a los numeradores 4, 3 y 8, y así resulta que:

- a la fracción $\frac{1}{3}$ corresponde **800.**
- a la fracción $\frac{1}{4}$ corresponde **600.**
- a la fracción $\frac{2}{3}$ corresponde **1.600.**

1. Haz los siguientes repartos proporcionales:

a) 700 en partes proporcionales a 1, 2, 4.

b) 30.000 en partes proporcionales a 2, 5 y 8.

c) 18.000 en partes proporcionales a 2, 4 y 6.

2. Resuelve los siguientes problemas:

A. Un padre quiere repartir 50.000 ptas. entre sus tres hijos en partes proporcionales a sus edades, que son 12 años, 16 años y 22 años. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

B. Tres albañiles de igual categoría han cobrado por hacer una obra 204.000 ptas. Un albañil trabajó 15 días, otro 12 y el tercero 7 días. ¿Qué cantidad corresponde a cada uno?

3. Realiza los siguientes repartos proporcionales:

a) 1.800 en partes proporcionales a $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{3}$

b) 6.200 en partes proporcionales a $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ y $\frac{1}{5}$

c) 1.200 en partes proporcionales a $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$

7. Regla de compañía. I

Concepto de regla de compañía.

Una de las aplicaciones más interesantes de los repartos proporcionales es la regla de compañía, que tiene por objeto calcular el reparto de las ganancias o pérdidas de una sociedad o empresa entre los socios que la componen.

El reparto de los beneficios debe hacerse siempre de acuerdo con lo establecido en los Estatutos de la Sociedad, pero lo más frecuente es que el reparto se haga de forma proporcional al capital aportado por cada socio y al tiempo de inversión de cada capital.

Casos que se pueden presentar.

Los casos más interesantes son tres:

PRIMER CASO

Cuando los capitales aportados por cada socio son distintos, pero el tiempo de inversión es el mismo.

En este caso la ganancia se reparte en partes directamente proporcionales a los capitales.

Ejemplo

Dos socios forman una empresa, para lo cual uno aporta 1.000.000 de ptas. y el otro aporta 1.500.000 ptas. Al cabo de un año han obtenido un beneficio de 750.000 ptas.

¿Cuánto corresponde a cada uno?

Cantidad a repartir: 750.000 ptas.

Observa cómo se hace este reparto.

Al primer socio le corresponden 300.000 ptas. y al segundo le corresponden 450.000 ptas.

PRIMER CASO

- **Cantidad a repartir: 750.000 ptas.**
- **Suma de capitales:**

$$\begin{array}{r} 1.000.000 \\ +\ 1.500.000 \\ \hline 2.500.000 \end{array}$$

- **Al primer socio corresponde:**

$$\frac{750.000}{2.500.000} \times 1.000.000 = 300.000 \text{ ptas.}$$

- **Al segundo socio corresponde:**

$$\frac{750.000}{2.500.000} \times 1.500.000 = 450.000 \text{ ptas.}$$

SEGUNDO CASO

Cuando los capitales aportados por cada socio son iguales, pero los tiempos de inversión son distintos.

En este caso la ganancia se reparte en partes directamente proporcionales a los tiempos.

Ejemplo

Dos socios aportan cada uno 500.000 ptas. para un negocio. El primero de ellos tuvo el dinero invertido 6 meses y el segundo lo tuvo 4 meses.

¿Cómo deben repartir una ganancia de 150.000 ptas.

Observa cómo se hace el reparto.

Al primer socio le corresponden 90.000 ptas. y al segundo le corresponden 60.000 ptas.

SEGUNDO CASO

- **Cantidad a repartir: 150.000 ptas.**
- **Suma de tiempos: 6 + 4 = 10 meses.**
- **Al primer socio corresponde:**

$$\frac{150.000}{10} \times 6 = 90.000 \text{ ptas.}$$

- **Al segundo socio corresponde:**

$$\frac{150.000}{10} \times 4 = 60.000 \text{ ptas.}$$

	SOCIO A	SOCIO B
Capitales	200.000	300.000
Tiempos	12 meses	4 meses
Capitales × tiempos	2.400.000	1.200.000

Capital a repartir → 1.080.000 ptas.

Suma: 2.400.000 + 1.200.000 = 3.600.000

- **A Alicia le corresponde:**

$$\frac{1.080.000}{3.600.000} \times 2.400.000 = 720.000$$

- **A Carmen le corresponde:**

$$\frac{1.080.000}{3.600.000} \times 1.200.000 = 360.000$$

TERCER CASO

Cuando los capitales aportados por cada socio son distintos y los tiempos de inversión son también distintos.

En este caso la ganancia se reparte en partes proporcionales a los productos de cada capital por el tiempo que ha estado invertido.

Ejemplo

Alicia inicia un negocio con 200.000 ptas. Ocho meses más tarde se le une Carmen, que aporta a la empresa 300.000 ptas. Al final del primer año obtienen una ganancia de 1.080.000 ptas.

¿Cuánto corresponde a cada una?

Hay que repartir 1.080.000 ptas. en partes proporcionales a $200.000 \times 12 = 2.400.000$ ptas. y $300.000 \times 4 = 1.200.000$ ptas., o, simplificando, en partes proporcionales a 24 y 12.

Observa estos repartos:

- A Alicia le corresponde:

$$\frac{1080000}{24 + 12} \times 24 = \frac{1080000}{36} \times 24 = \textbf{720.000 ptas.}$$

- A Carmen le corresponde:

$$\frac{1080000}{24 + 12} \times 12 = \frac{1080000}{36} \times 12 = \textbf{360.000 ptas.}$$

A Alicia le corresponden 720.000 ptas. y a Carmen le corresponden 360.000 ptas.

1. Resuelve estos problemas:

A. Dos socios A y B aportaron para la fundación de una empresa 5.000.000 de ptas. El socio A aportó 3.000.000 de ptas. y el socio B aportó el resto.
Al cabo de un año la empresa ha obtenido un beneficio de 1.500.000 ptas.
¿Qué beneficio corresponde a cada socio?

B. Una empresa la forman tres socios A, B y C con las siguientes aportaciones y tiempos. El socio A aporta 200.000 ptas. durante 3 años; el socio B aporta 500.000 ptas. durante 2 años, y el socio C aporta 800.000 ptas. durante 1 año. Si hay que repartirse un beneficio de 3.600.000 ptas. ¿cuánto corresponde a cada uno?

C. Tres socios han iniciado un negocio con los siguientes capitales: 50.000 ptas., 80.000 ptas. y 100.000 ptas. Al cabo de un año, después de retirar cada uno un sueldo, queda un beneficio de 460.000 ptas.
¿Cómo se reparten este beneficio?

D. Tres personas A, B y C se asocian para formar un negocio aportando las siguientes cantidades durante el mismo tiempo: A → 200.000 ptas., B → 250.000 ptas. y C → 350.000 ptas. Al cabo de un cierto tiempo tienen una ganancia de 600.000 ptas.
¿Cuánto corresponde a cada uno?

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

1. Calcula:

① El 5 % de 200.
② El 6 % de 300.
③ El 10 % de 1.000.
④ El 10 % de 5.000.
⑤ El 8 % de 1.000.
⑥ El 8 % de 2.000.
⑦ El 3 % de 500.
⑧ El 3 % de 600.
⑨ El 3 % de 6.000.
⑩ El 7 % de 500.
⑪ El 7 % de 5.000.
⑫ El 7 % de 50.000.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Reparte 588 en partes proporcionales a 4, 6 y 18 y 360 en partes proporcionales a 1, 2 y 3.

2. Reparte 225 en partes proporcionales a $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{6}$ y 242 en partes proporcionales a $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{2}$

3. Completa en tu cuaderno esta tabla:

25 %	2.000	3.000	5.000	6.000	8.000	9.000	12.000	15.000	18.000	20.000

4. Como $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ ¿se podría hallar el 25 % de una cantidad dividiéndola por 4? Compruébalo.

5. Reparte 210.000 proporcionalmente a 1, 2 y 3.

6. Reparte 2.160 en partes proporcionales a $\frac{1}{12}$ y $\frac{1}{15}$ y 3.300 en partes proporcionales a $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{5}$

7. Escribe en tu cuaderno un problema de regla de tres y después resuélvelo.

8. Inventa un problema de porcentajes y resuélvelo.

9. El 5 % de un número es 20. ¿Cuál es el número?

10. Escribe en forma de porcentaje los siguientes números:

a) $3 = \frac{300}{100} = 300\ \%$
b) $0{,}4 = \frac{4}{10} = \frac{40}{100} = 40\ \%$
c) 2
d) 0,6
e) 0,9
f) $\frac{3}{5}$

11. Para empaquetar 720 huevos se necesitan 20 cajas.
¿Cuántas cajas se necesitarán para empaquetar 2.160 huevos? ¿Y para empaquetar 3.600?

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

1. Un cazador, que había perdido su comida, se encuentra con dos pastores que le invitan a comer. Un pastor puso tres panes y el otro dos panes. Al final el cazador les dio 30 ptas. a los dos pastores para que se las repartieran equitativamente.

   ¿Cuánto corresponde a cada pastor?

   ¡Cuidado! La solución de este problema no es la que parece a primera vista.

2. Une los nueve puntos por segmentos sin levantar el lápiz del papel.

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. Un billete de lotería resulta premiado con 1.500.000 ptas. y lo cobran dos personas, correspondiendo al primero 600.000 ptas. y al segundo 900.000 ptas.
   Sabiendo que el billete costó 5.000 ptas. ¿cuánto aportó cada uno para comprar el billete?

2. De las 40.700 personas de un pueblo, 12.840 usan gafas.
   ¿Qué tanto por ciento de las personas del pueblo usan gafas?

3. Se han comprado 8 objetos iguales por 6.000 ptas.
   ¿Cuánto valen 15 objetos? ¿Y 17 objetos?

4. Cuatro socios reúnen un capital de 5.000.000 de ptas. para explotar un negocio en el que obtienen una ganancia de 1.000.000 de ptas. Repartida la ganancia corresponde:
   al primero, 300.000 ptas.; al segundo, 400.000 ptas.; al tercero, 180.000 ptas., y al cuarto, el resto.
   Encontrar el capital empleado por cada socio.

5. Tres personas A, B y C inician a la vez un negocio aportando las siguientes cantidades:
   A → 270.000 ptas.; B → 250.000 ptas., y C → 180.000 ptas.
   Al cabo de un año han obtenido como beneficios el 30 % del capital.
   Formula la pregunta del problema y resuélvelo.

6. Un comisionista cobra el 5 % del importe de las ventas que realiza.
   ¿Cuánto necesita vender para ganar 40.000 ptas.?

7. En una mina de carbón, por cada 1.000 kg de material extraído solamente se obtienen 600 kg de carbón.
   ¿Cuántos kilogramos de carbón se pueden extraer de 20.000 kg de material?

8. Para fabricar 30 kg de chocolate se necesitan 10 kg de cacao.
   ¿Cuántos kilogramos de chocolate se podrán fabricar con 64 kg de cacao?

9. Una persona toma el autobús dos veces cada día. En 20 días se gasta 1.000 ptas. en el autobús.
   ¿Cuánto le cuesta cada viaje? ¿Y 7 viajes?

TEMA 13 LA PROPORCIONALIDAD INVERSA

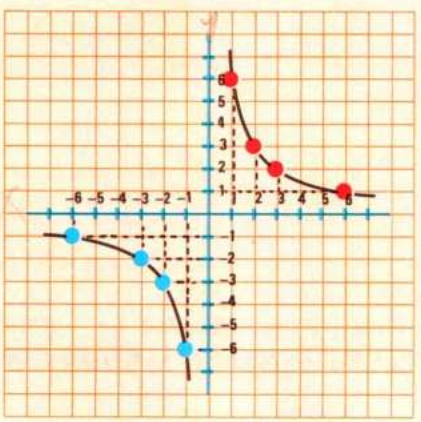
1. Función de proporcionalidad inversa. I

Representación gráfica en la función de proporcionalidad inversa.

TABLA DE VALORES DE LA FUNCIÓN f

x	$y = \frac{6}{x}$	Grafo de la función f
−6	−1	(−6, −1)
−3	−2	(−3, −2)
−2	−3	(−2, −3)
1	6	(1, 6)
2	3	(2, 3)
6	1	(6, 1)

GRÁFICO DE LA FUNCIÓN f



Sea la función de variable entera $\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$ de ecuación $y = \frac{6}{x}$

Observa la tabla de valores de esta función:

$$f(-3) = \frac{6}{-3} = -2; \quad f(-2) = \frac{6}{-2} = -3;$$

$$f(2) = \frac{6}{2} = 3; \quad f(-1) = \frac{6}{-1} = -6$$

La tabla de valores permite formar el conjunto de pares ordenados o grafo de la función.

Cada par ordenado se representa por un punto, y el conjunto de todos los pares ordenados se representa por un conjunto de puntos, que es el gráfico o representación gráfica de la función.

Los puntos que forman el gráfico de la función de ecuación $y = \frac{6}{x}$ están sobre una curva que se llama **hipérbola.** La hipérbola tiene dos ramas.

Observa que en esta función el cero no tiene imagen porque no puede dividirse por cero.

1. Completa las tablas de valores de las funciones de variable entera siguientes y construye el gráfico de cada una de ellas.

$y = \frac{4}{x}$

x	$y = \frac{4}{x}$
−4	...
−2	...
−1	...
4	...
2	...
1	...

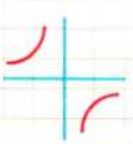
$y = \frac{-6}{x}$

x	$y = \frac{-6}{x}$
−3	...
−2	...
−1	...
3	...
2	...
1	...

$y = \frac{3}{x}$

x	$y = \frac{3}{x}$
−3	...
−1	...
3	...
1	...

El gráfico de la función $y = \frac{-6}{x}$ cae en los cuadrantes 2.° y 4.°.



2. Función de proporcionalidad inversa. II

FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

$$y = \frac{6}{x}; \quad y = \frac{4}{x}; \quad y = \frac{12}{x}$$

$$y = \frac{k}{x}$$

$$\text{Si } x = 1 \rightarrow y = \frac{k}{1} = k$$

Constante de proporcionalidad

Constante de proporcionalidad.

Observa las funciones siguientes:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}; \quad y = \frac{6}{x} \qquad \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}; \quad y = \frac{4}{x} \qquad \mathbb{Q}^+ \xrightarrow{h} \mathbb{Q}^+; \quad y = \frac{12}{x}$$

Las funciones **f** y **g** son funciones de variable entera, y la función **h** es una función de variable racional positiva.

Todas estas funciones tienen una ecuación de la forma $y = \frac{k}{x}$, donde **k** es un número constante distinto de cero. Estas funciones se llaman **funciones de proporcionalidad inversa.**

Observa que, en general, en la función $y = \frac{k}{x}$ la imagen del 1 es $\frac{k}{1} = k$.

$f(1) = \frac{6}{1} = 6$; $g(1) = \frac{4}{1} = 4$; $h(1) = \frac{12}{1} = 12$

Este número **k** se llama **constante de proporcionalidad.**

En una función de proporcionalidad inversa $f(x) = \frac{k}{x}$ la imagen del 1 es igual a la constante de proporcionalidad $f(1) = k$.

Producto de cada original por su imagen en una función de proporcionalidad inversa.

Original x × **imagen y** = 6

Originales x	Imágenes y	Productos
−6	−1	(−6) · (−1) = 6
−3	−2	(−3) · (−2) = 6
−2	−3	(−2) · (−3) = 6
−1	−6	(−1) · (−6) = 6
1	6	1 · 6 = 6
2	3	2 · 3 = 6
3	2	3 · 2 = 6

Consideremos la función de ecuación $y = \frac{6}{x}$

Observa los elementos originales y los elementos imágenes en la tabla de valores.

Comprueba que el producto de cada original por su imagen es igual a la constante de proporcionalidad:

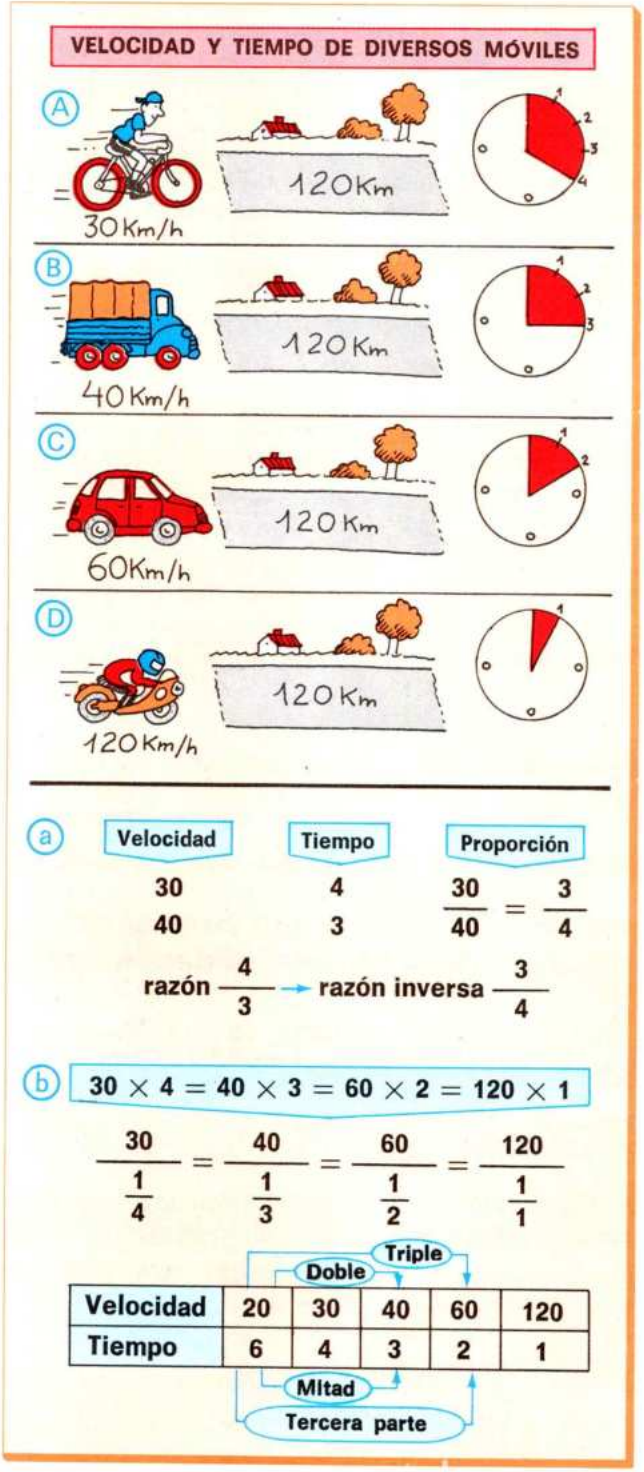
$$(-6) \cdot (-1) = (-3) \cdot (-2) = 2 \cdot 3 = 6 \cdot 1 = 6$$

Si **x** es un elemento original e **y** es su correspondiente imagen se tiene $x \cdot y = 6$.

En general, en la función $y = \frac{k}{x}$ se verifica que $x \cdot y = k$.

Esta propiedad caracteriza a las funciones de proporcionalidad inversa.

En una función de proporcionalidad inversa el producto de cada número por su imagen es igual a la constante de proporcionalidad.



(a)

Velocidad	Tiempo	Proporción
30	4	$\frac{30}{40} = \frac{3}{4}$
40	3	

razón $\frac{4}{3}$ → razón inversa $\frac{3}{4}$

(b) $30 \times 4 = 40 \times 3 = 60 \times 2 = 120 \times 1$

$$\frac{30}{\frac{1}{4}} = \frac{40}{\frac{1}{3}} = \frac{60}{\frac{1}{2}} = \frac{120}{\frac{1}{1}}$$

Triple · Doble · Mitad · Tercera parte

Velocidad	20	30	40	60	120
Tiempo	6	4	3	2	1

Concepto de magnitudes inversamente proporcionales.

Supongamos que diversos vehículos A, B, C y D realizan, con movimiento uniforme, el trayecto de 120 km que separa las ciudades X e Y.

El tiempo que tarda cada vehículo en hacer el recorrido depende de su velocidad.

Designemos por **v** la velocidad y por **t** el tiempo, y recuerda que $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{t}}$

(A) Si $\mathbf{v} = 30$ km/h, entonces $\mathbf{t} = \frac{120}{30} = 4$ horas.

(B) Si $\mathbf{v} = 40$ km/h, entonces $\mathbf{t} = \frac{120}{40} = 3$ horas.

(C) Si $\mathbf{v} = 60$ km/h, entonces $\mathbf{t} = \frac{120}{60} = 2$ horas.

(D) Si $\mathbf{v} = 120$ km/h, entonces $\mathbf{t} = \frac{120}{120} = 1$ hora.

Observa que el producto de cada original (velocidad) por su correspondiente imagen (tiempo) es siempre el mismo número (120):

$$30 \times 4 = 40 \times 3 = 60 \times 2 = 120 \times 1 = 120$$

Por esta razón, la función que asocia a cada velocidad el tiempo que tarda en recorrer la distancia de 120 km es una función de proporcionalidad inversa:

$$\mathbf{t} = \frac{120}{\mathbf{v}}$$

Observa que las magnitudes «velocidad» y «tiempo» están relacionadas y que se verifica:

(a) Que la razón de dos cantidades cualesquiera de la primera magnitud (velocidad) y la razón inversa de las correspondientes cantidades de la segunda magnitud (tiempo) forman proporción.

(b) Que los valores de una magnitud son directamente proporcionales a los inversos de los valores correspondientes de la otra.

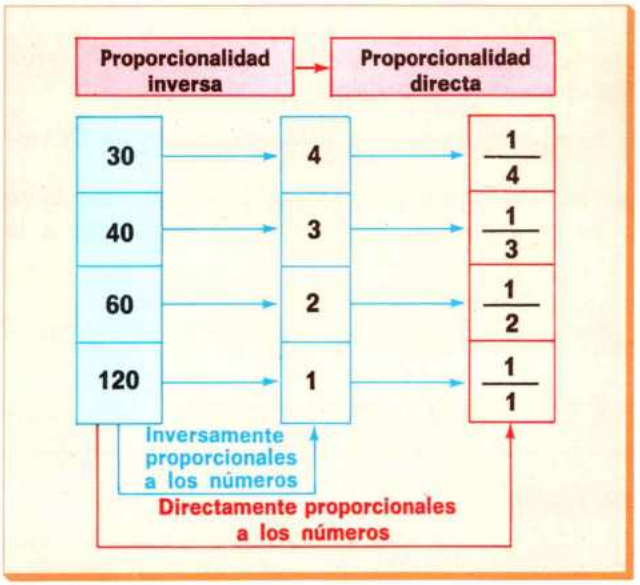
Por tanto, que a doble velocidad corresponde la mitad del tiempo, a triple velocidad corresponde la tercera parte del tiempo, etc.

Por todo lo anterior se dice que las magnitudes velocidad y tiempo son **inversamente proporcionales.**

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando el producto de los valores correspondientes de dichas magnitudes es constante.

Dos magnitudes son inversamente proporcionales si la función que asocia a cada valor de una de ellas el correspondiente de la otra es una función de proporcionalidad inversa.

4. Aplicaciones de la proporcionalidad inversa. I



Reducción de una proporcionalidad inversa a una proporcionalidad directa.

Acabamos de ver que la serie de números 30, 40, 60, 120 es inversamente proporcional a la serie de números 4, 3, 2, 1.

$30 \times 4 = 40 \times 3 = 60 \times 2 = 120 \times 1 = 120 =$ **constante**

También hemos visto que los números 30, 40, 60 y 120 son directamente proporcionales a los inversos de 4, 3, 2 y 1, es decir, son directamente proporcionales a

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$$

ya que $\dfrac{30}{\frac{1}{4}} = \dfrac{40}{\frac{1}{3}} = \dfrac{60}{\frac{1}{2}} = \dfrac{120}{\frac{1}{1}}$

De este modo se reduce una proporcionalidad inversa a una proporcionalidad directa.

Repartos inversamente proporcionales.

Reparto inversamente proporcional a 3, 5, 6 → **Reparto directamente proporcional a $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$**

① Se reducen las fracciones a común denominador:

m.c.m. (3, 5, 6) = 30

$$\frac{1}{3} = \frac{10}{30}; \quad \frac{1}{5} = \frac{6}{30}; \quad \frac{1}{6} = \frac{5}{30}$$

② Se reparte 420 en partes directamente proporcionales a los numeradores 10, 6 y 5:

$$\frac{420}{10+6+5} \times 10 = \frac{420}{21} \times 10 = 200$$

$$\frac{420}{10+6+5} \times 6 = \frac{420}{21} \times 6 = 120$$

$$\frac{420}{10+6+5} \times 5 = \frac{420}{21} \times 5 = 100$$

Repartir 420 ptas. entre tres niños en partes inversamente proporcionales a sus edades, que son 3, 5 y 6 años.

Para hacer este reparto inverso se reparte 420 en partes directamente proporcionales a los inversos de 3, 5 y 6:

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{5} \text{ y } \frac{1}{6}$$

Para ello:

① Se hallan fracciones equivalentes a las dadas pero que tengan el mismo denominador: $\frac{10}{30}, \frac{6}{30}, \frac{5}{30}$

② Se reparte 420 en partes directamente proporcionales a los numeradores 10, 6 y 5.

Así resulta:

- Al niño de 3 años le corresponden 200 ptas.
- Al niño de 5 años le corresponden 120 ptas.
- Al niño de 6 años le corresponden 100 ptas.

1. Contesta:

a) ¿Son inversamente proporcionales las series de números 1, 2, 4, 8 y 8, 4, 2, 1?

b) ¿Son directamente proporcionales las series de números 1, 2, 4, 8 y 3, 6, 12, 24?

2. Resuelve estos problemas:

A. Reparte 180 en partes inversamente proporcionales a 2 y 4.

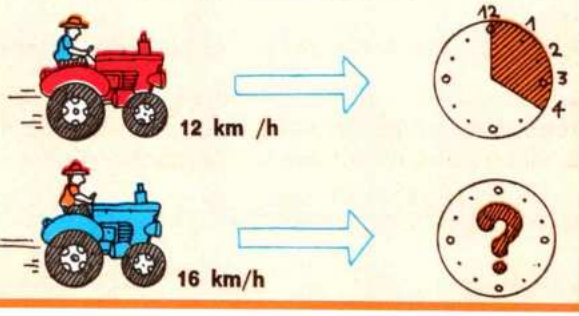
B. Reparte 340 en partes inversamente proporcionales a 2, 3 y 9.

5. Aplicaciones de la proporcionalidad inversa. II

Regla de tres simple inversa.

PLANTEAMIENTO MATEMÁTICO

12 km/h ⟶ 4 horas
16 km/h ⟶ x horas



Un tractor que lleva una velocidad de 12 km/h tarda 4 horas en hacer un recorrido.

¿Cuánto tiempo tardaría si la velocidad fuera de 16 km?

Para resolver este problema se puede aplicar, como en la regla de tres directa, el método de reducción a la unidad.

Observa dos formas de hacer el problema:

PRIMERA FORMA

Método de reducción a la unidad

Hay que recordar que si el valor de una magnitud se multiplica por un número, el valor correspondiente de la otra magnitud debe dividirse por dicho número.

Velocidad	Tiempo
12	4
: 12	× 12
1	48
× 16	: 16
16	3

SEGUNDA FORMA

Aplicando la propiedad de que el producto **original × imagen = constante:**

Si a 12 km/h —tarda→ 4 h
a 16 km/h —tardará→ **x**

Original × imagen = original × imagen:

$$12 \cdot 4 = 16 \cdot x$$

$$x = \frac{12 \cdot 4}{16} = 3 \text{ horas}$$

Observa que este valor de **x** también resulta de la proporción:

$$\frac{16}{12} = \frac{4}{x} \longrightarrow x = \frac{4 \times 12}{16} = \frac{48}{16} = 3$$

El tractor tardaría 3 horas en hacer el recorrido.

1. Resuelve los siguientes problemas:

A. Para hacer una piscina en 15 días se han empleado 2 trabajadores.
¿Cuántos trabajadores se necesitarían para hacer la piscina en 30 días?

B. Un coche, a una velocidad de 60 km/h, tarda 8 horas en recorrer una distancia.
¿Cuánto tardaría en recorrer la misma distancia si la velocidad fuera de 120 km/h?

C. En un establo hay 24 vacas, que tienen alimento para 20 días.
Si el número de vacas aumenta en 16 ¿para cuántos días tendrán alimento?

D. Con el vino que hay en un tonel se llenan 300 botellas de $\frac{3}{4}$ de litro cada una.
¿Cuántas botellas se podrían llenar si la capacidad de cada botella fuera $\frac{3}{10}$ de litro?

Actividades

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Haz los siguientes repartos:

a) 180 en partes inversamente proporcionales a 3 y 2.

b) 1.356 en partes inversamente proporcionales a 4, 6 y 12.

c) 4.371 en partes inversamente proporcionales a 3, 4 y 5.

d) 5.100 en partes inversamente proporcionales a $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$

e) 720 en partes inversamente proporcionales a $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$

f) 260 en partes inversamente proporcionales a 3 y $\frac{1}{4}$

2. En un concurso de carreras se destinan 58.700 ptas. para tres premios, que han de ser inversamente proporcionales a los tiempos invertidos en el recorrido por los tres primeros corredores. El corredor A tarda 26 minutos, el B tarda 28 y el C, 30.

Calcula lo que corresponde a cada uno.

3. Un grupo de 30 obreros debe hacer una obra en 30 días, pero se incorporan a la obra 6 trabajadores más.

¿Cuánto tiempo tardarán en realizar la obra?

4. Un agricultor tiene 100 animales y forraje para poderlos alimentar durante 90 días. Vende un cierto número de cabezas y de este modo el forraje puede durarle 30 días más.

¿Cuántos animales vendió?

5. Reparte una gratificación global de 460.027 ptas. entre tres empleados en proporcionalidad directa a sus años en la empresa, que son 18, 15 y 12 años, y en proporcionalidad inversa a sus sueldos, que son 48.000, 30.000 y 36.000 ptas.

Sugerencia En lugar de tomar los números 48.000, 30.000 y 36.000 se pueden tomar otros números más sencillos que resulten de dividirlos por un mismo divisor: 48, 30 y 36.

Hay que repartir 460.027 en partes directamente proporcionales a $\frac{18}{48}$, $\frac{15}{30}$ y $\frac{12}{36}$, es decir, a $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$

6. Un ganadero, a fin de que el pienso de que dispone sea suficiente para alimentar a sus bueyes durante 20 semanas, vende 60 bueyes. Si no los hubiera vendido, sólo tendría para 14 semanas.

¿Cuántos bueyes le quedaron?

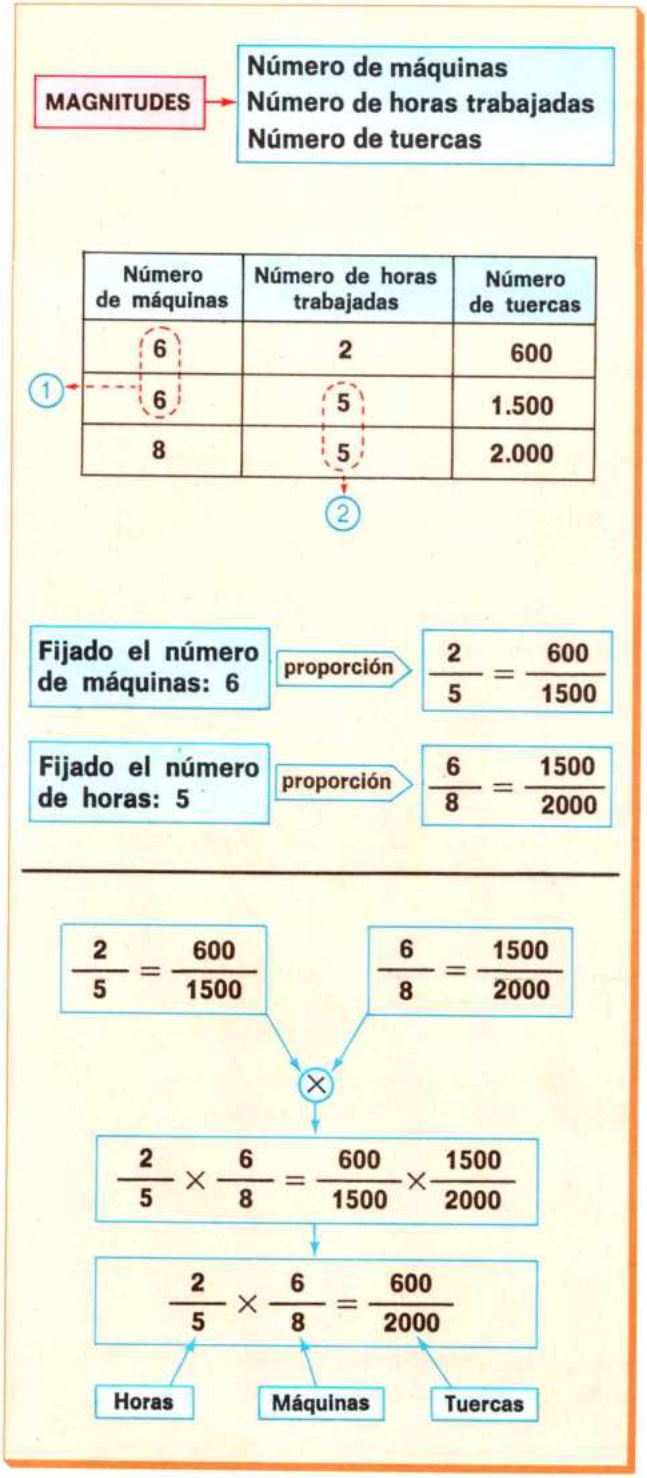
7. Tres personas deben repartirse una herencia de 11'016.000 ptas. en partes directamente proporcionales al número de hijos que tienen (2, 3 y 5, respectivamente) e inversamente proporcionales a los capitales que ya poseen (4'000.000, 9'000.000 y 2'500.000 ptas.):

Calcula la parte correspondiente a cada persona.

APLICACIONES DE LA PROPORCIONALIDAD COMPUESTA

1. Proporcionalidad compuesta

Magnitud proporcional a otras varias.



En una fábrica donde trabajan máquinas iguales se ha contabilizado el número total de tuercas producidas, que es el que se indica en la tabla.

Observa que:

(1) Si fijamos el número de máquinas (**6**), entonces las magnitudes «horas trabajadas» y «número de tuercas» son directamente proporcionales, ya que a doble tiempo corresponde doble número de tuercas, etc., y se tiene la proporción:

$$\frac{2}{5} = \frac{600}{1500}$$

(2) Si fijamos el tiempo (**5 h**), entonces las magnitudes «número de máquinas» y «número de tuercas» también son directamente proporcionales y se tiene la proporción:

$$\frac{6}{8} = \frac{1500}{2000}$$

La magnitud «número de tuercas» es proporcional a las otras dos, «número de máquinas» y «número de horas trabajadas», y se dice que esta proporcionalidad es una **proporcionalidad compuesta.**

Consideremos de nuevo las dos proporciones anteriores:

$$\frac{2}{5} = \frac{600}{1500} \quad \text{y} \quad \frac{6}{8} = \frac{1500}{2000}$$

En cada una de estas proporciones sólo aparecen cantidades de dos de las tres magnitudes que están en la tabla.

Multiplicando las dos proporciones anteriores resulta una nueva proporción en la que intervienen las tres magnitudes que aparecen en la tabla.

Una magnitud es proporcional a otras varias cuando es proporcional a cada una de ellas si permanecen fijas las restantes.

Cuando una magnitud es proporcional a otras varias se puede escribir una proporción en la que intervengan cantidades de todas las magnitudes relacionadas.

MÉTODO DE REDUCCIÓN A LA UNIDAD

	Número de máquinas	Número de horas trabajadas	Número de piezas
	6	2	600
①	6	1	$\frac{600}{2} = 300$
②	1	1	$\frac{300}{6} = 50$
③	9	1	$9 \times 50 = 450$
	9	3	$450 \times 3 = 1.350$

MÉTODO DE LAS PROPORCIONES

a) **Plantear el problema:**

$$\begin{array}{ccccc} 6 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 600 \\ 9 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & x \\ \text{(d)} & & \text{(d)} & & \end{array}$$

$$\frac{6}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{600}{x}$$

$$\frac{12}{27} = \frac{600}{x}$$

b) **Despejar la incógnita**

$$x = \frac{600 \cdot 27}{12} = 50 \cdot 27 = 1.350$$

Concepto de regla de tres compuesta directa.

En una fábrica 6 máquinas iguales producen en 2 horas 600 piezas.

¿Cuántas piezas producirán 9 de estas máquinas en 3 horas?

En este problema el número de piezas fabricadas es proporcional al número de máquinas y al número de horas y se dice que es un problema de **regla de tres compuesta.**

Cómo se resuelven los problemas de regla de tres compuesta directa.

PRIMERA FORMA

Método de reducción a la unidad

① Se averigua lo que producen las 6 máquinas en 1 hora, que es 300 piezas.

② Se averigua lo que produce 1 máquina en 1 hora.

Así resulta que 1 máquina en 1 hora produce 50 piezas.

A partir de aquí ya es fácil encontrar la solución.

③ 9 máquinas en 1 hora producen $9 \times 50 = 450$ piezas: por tanto: 9 máquinas en 3 horas producen

$$450 \times 3 = \mathbf{1.350 \text{ piezas}}$$

SEGUNDA FORMA

Método de las proporciones

Planteamos el problema así:

Número de máquinas	Número de horas de trabajo	Número de piezas
6	2	600
9	3	x
d	d	

Las letras (**d**) indican que la proporcionalidad entre número de máquinas y número de piezas y entre tiempo y número de piezas es directa.

Escribimos la proporción:

$$\frac{6}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{600}{x} \longrightarrow \frac{12}{27} = \frac{600}{x}$$

de donde $x = \frac{600 \times 27}{12} = 50 \times 27 = \mathbf{1.350 \text{ piezas.}}$

Las 9 máquinas producen 1.350 piezas.

Cómo se resuelven los problemas de regla de tres compuesta directa e inversa.

Para construir 4 casas iguales en 30 días hacen falta 60 albañiles.

¿Cuántos albañiles se necesitarán para construir 6 casas en 90 días?

Observa en este problema:

a) Que el número de casas y el número de albañiles son magnitudes directamente proporcionales.

b) Que el número de días y el número de albañiles son magnitudes inversamente proporcionales.

Hay dos formas de resolver este problema.

PRIMERA FORMA

Por el método de reducción a la unidad

	Número de casas	Número de días de trabajo	Número de albañiles
	4	30	60
①	1	30	$\frac{60}{4} = 15$
②	1	1	$30 \times 15 = 450$
③	6	1	$450 \times 6 = 2.700$
	6	90	$\frac{2700}{90} = 30$

① Se averigua cuántos albañiles harían falta para construir una casa en 30 días: 15 albañiles.

② Se averigua los albañiles que harían falta para construir una casa en 1 día: 450 albañiles.

A partir de aquí es fácil encontrar la solución.

③ Para hacer 6 casas en 1 día se necesitan $6 \times 450 = 2.700$ albañiles, y para hacerla en 90 días se necesitan:

$$2.700 : 90 = 30 \text{ albañiles}$$

SEGUNDA FORMA

Método de las proporciones

Planteamos el problema así:

Número de casas	Días	Número de albañiles
4	30	60
6	90	x
d	i	

Al escribir la proporción hay que cuidar de invertir la razón de los días, porque la magnitud días y la magnitud obreros son inversamente proporcionales por ser esta magnitud y el número de obreros inversamente proporcionales.

$$\frac{4}{6} \times \frac{90}{30} = \frac{60}{x} \rightarrow x = \frac{60 \times 6 \times 30}{4 \times 90} = \textbf{30 albañiles}$$

Se necesitarán 30 albañiles.

MÉTODO DE REDUCCIÓN A LA UNIDAD

(Ver tabla anterior)

MÉTODO DE LAS PROPORCIONES

a) **Plantear el problema:**

$$\begin{array}{lll} 4 & \rightarrow 30 & \rightarrow 60 \\ 6 & \rightarrow 90 & \rightarrow x \\ \text{(d)} & \text{(i)} & \end{array}$$

$$\frac{4}{6} \cdot \frac{90}{30} = \frac{60}{x}$$

$$\frac{360}{180} = \frac{60}{x}$$

b) **Despejar la incógnita:**

$$x = \frac{60 \times 180}{360} = \frac{60}{2} = 30$$

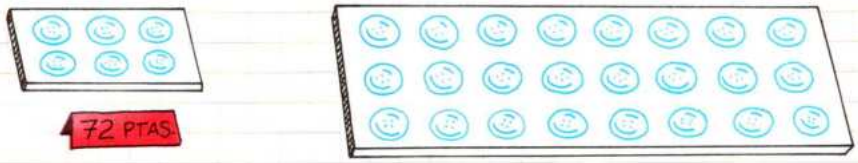
1. Resuelve los problemas siguientes:

A. Si cinco máquinas tejen en 6 horas 60 jerseys ¿cuántas máquinas se necesitarán para hacer 100 jerseys en 5 horas?

B. Se sabe que 10 obreros en 20 días cavan 400 metros de una zanja. ¿Cuántos obreros cavarán 100 metros de zanja en 1 día?

Actividades

1. ¿Cuánto vale el segundo cartón de botones?

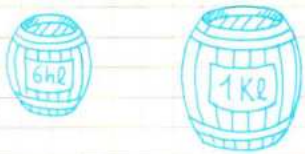


2. Por construir y barnizar 8 puertas iguales un carpintero cobra 168.000 ptas.
¿Cuánto cobraría por construir y barnizar 5 puertas?

3. Tres máquinas iguales trabajando 6 horas cada día fabrican 1.800 piezas.
¿Cuántas piezas pueden fabricar 5 máquinas trabajando 8 horas cada día?

4. Seis cajas con 120 pastillas de jabón cada una han costado 25.200 ptas.
¿Cuánto valen 8 cajas con 150 pastillas de jabón cada una iguales a las anteriores?

5. Cinco toneles de vino de 6 hl cada uno valen 168.000 ptas.
¿Cuánto valen 8 toneles de 1 kl cada uno de vino de igual calidad?



6. Una persona ha cobrado por 17 horas de trabajo 13.600 ptas.
¿Cuánto cobrará por 25 horas de trabajo?

7. Un motor extrae de una piscina 3.600 litros de agua en 3 horas.
¿Cuántos litros de agua pueden extraer 4 motores iguales al primero en 5 horas?

8. Una persona tiene 30 vacas y alimento para ellas durante 16 días. Vende 18 vacas.
¿Cuántos días puede alimentar las vacas que le quedan?

9. Una persona compra una caja que contiene 12 docenas de bolígrafos por 864 ptas. Después la vende a razón de 100 ptas. cada 10 bolígrafos.
Formula la pregunta del problema y después resuélvelo.

10. Un ganadero, a fin de que el forraje que posee sea suficiente para alimentar a sus bueyes durante 20 semanas, vende 60 bueyes. Si no los hubiera vendido, sólo tendría forraje para 14 semanas.
¿Cuántos bueyes le quedaron?

Planteamiento

x bueyes tienen para → 14 semanas
$x - 60$ bueyes tendrán para → 20 semanas

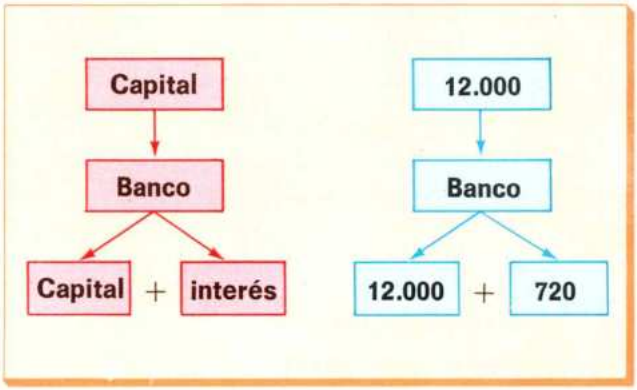
$$14 \cdot x = 20 \cdot (x - 60)$$

Resuelve la ecuación.

11. Un agricultor tiene 300 animales y pienso para poderlos alimentar durante 90 días. Vende un cierto número de cabezas y de este modo el pienso puede durarle 45 días más.
¿Cuántos animales ha vendido?

4. Interés simple. I

Capital, interés, réditos.

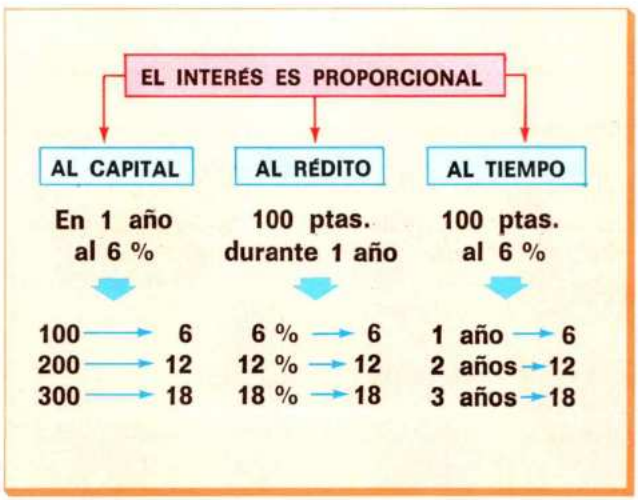


Luis tenía en su cartilla de ahorros un capital de 12.000 pesetas. El Banco le paga 6 ptas. por cada 100 ptas. de su capital. Al cabo de un año ya tenía en la cartilla 12.720 ptas.

- El **capital** eran las 12.000 ptas. que Luis tenía.
- El **rédito** o **tanto por ciento** eran las 6 ptas. que el Banco le daba por cada 100 ptas. de su capital.
- El **tiempo** era 1 año (el tiempo que tuvo Luis el dinero en el Banco).
- El **interés** son las 720 ptas. que ha producido el capital de Luis.

Capital es el dinero que se coloca en un Banco o que se ha prestado.
Rédito o tanto por ciento es lo que producen 100 pesetas en 1 año.
Tiempo es la duración del préstamo o imposición.
Interés es lo que produce un capital prestado.

Proporcionalidad del interés al capital, al rédito y al tiempo.



Si el rédito es del 6 % y el tiempo de 1 año:

- Un capital de 100 ptas. producirá en 1 año un interés de 6 ptas.
- Un capital de 200 ptas. producirá en 1 año un interés de $2 \times 6 = 12$ ptas.
- Un capital de 300 ptas. producirá en 1 año un interés de $3 \times 6 = 18$ ptas. Etc.

Esto indica que el interés es directamente proporcional al capital.

Del mismo modo se puede comprobar que el interés es también directamente proporcional al rédito y al tiempo.

Los problemas de interés son problemas de regla de tres compuesta.

El interés es directamente proporcional a cada una de las tres magnitudes capital, rédito y tiempo.

1. Resuelve estos problemas:

A. Amparo deja sus ahorros, que ascienden a 15.000 ptas., en el Banco durante 1 año. El Banco le pagará al final del año un rédito del 7 %.
¿Cuánto le producen las 15.000 ptas. al año? ¿Cuáles serán entonces los ahorros de Amparo?

B. Andrés abre una cartilla de ahorros con 20.000 ptas. en un Banco que le promete el 8 %.
¿Cuál es el interés que le producen las 20.000 ptas.?

Fórmula del interés cuando el tiempo viene expresado en años.

Vamos a hallar la fórmula general del interés que produce un capital de **C** ptas. durante un tiempo (**t** años) a un rédito **r**.

Para ello aplicaremos el método de reducción a la unidad. 100 ptas. en 1 año producen **r** ptas.

① Se averigua lo que produce 1 peseta en 1 año:

1 peseta en 1 año produce $\frac{r}{100}$

② Se averigua lo que produce un capital de **C** ptas. en 1 año:

C pesetas en 1 año producen $C \cdot \frac{r}{100}$

③ Se averigua lo que producen **C** pesetas en **t** años:

C pesetas en **t** años producen $C \cdot \frac{r}{100} \cdot t$

Como lo que producen **C** ptas. en **t** años es el interés (**i**), resulta la fórmula

$$i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

En esta fórmula el tiempo viene expresado en años.

CAPITALES	TIEMPOS	INTERESES QUE PRODUCEN
100 ptas.	1 año	r ptas.
1 pta.	1 año	$\frac{r}{100}$ ptas.
C ptas.	1 año	$C \cdot \frac{r}{100}$ ptas.
C ptas.	t años	$C \cdot \frac{r}{100} \cdot t$ ptas.

$i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$ — t: tiempo en años

$C = \frac{100 \cdot i}{r \cdot t}$ $\quad r = \frac{100 \cdot i}{C \cdot t}$ $\quad t = \frac{100 \cdot i}{C \cdot r}$

Fórmulas del interés cuando el tiempo viene expresado en meses o en días.

Acabamos de ver que la fórmula del interés cuando el tiempo viene expresado en años es:

$$i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

- Cuando **t** viene expresado en meses se hace la reducción a años:

$$t \text{ meses} = \frac{t}{12} \text{ años}$$

con lo que la fórmula del interés queda así:

$$i = \frac{C \cdot r}{100} \cdot \frac{t}{12} = \frac{C \cdot r \cdot t}{100 \times 12} = \frac{C \cdot r \cdot t}{1200}$$

- Cuando el tiempo **t** viene expresado en días se reducen los días a años, teniendo en cuenta que el año comercial tiene 360 días:

$$t \text{ días} = \frac{t}{360} \text{ años}$$

La fórmula del interés en este caso queda así:

$$i = \frac{C \cdot r}{100} \cdot \frac{t}{360} = \frac{C \cdot r \cdot t}{36000}$$

FÓRMULAS DEL INTERÉS CUANDO EL TIEMPO VIENE EXPRESADO EN MESES O EN DÍAS

$i = \frac{C \cdot r \cdot t}{1200}$ — t: tiempo en meses

$i = \frac{C \cdot r \cdot t}{36000}$ — t: tiempo en días

Elementos y fórmula del descuento.

Cuando se realiza una compra es frecuente no pagar al contado, sino que se suele firmar un documento por el cual el comprador se compromete a pagar al vendedor el importe de la compra en un plazo determinado. Este documento se llama **pagaré** si lo extiende el comprador y **letra de cambio** si lo extiende el vendedor. En el mundo del comercio se utiliza más frecuentemente la letra de cambio.

Si el vendedor quiere tener el dinero antes del plazo convenido, cede la letra de cambio a un Banco, que no le paga el importe completo del documento, sino que le **descuenta** el interés simple de la cantidad que consta en la letra durante el tiempo que falta para el día en que se debe efectuar el pago. Esta cantidad con la que se queda el Banco se llama **descuento.**

En todo problema de descuento intervienen:

- **El capital nominal (N)** o cantidad que figura en la letra.
- **El valor efectivo (E)** o cantidad que paga el Banco al poseedor de la letra.
- **El descuento (D)** o cantidad que descuenta el Banco.

Observa que:

valor efectivo = nominal − descuento → E = N − D

La forma del descuento para **t** días es la misma que la del interés:

$$D = \frac{N \cdot r \cdot t}{36000}$$

Problema

Una persona compra a un vendedor de electrodomésticos un frigorífico por 60.000 ptas. El comprador firma una letra de cambio en la que se compromete a pagar las 60.000 ptas. en 90 días.

El vendedor lleva la letra al Banco, que le retiene un 18 %.

¿Cuánto recibe el vendedor?

Observa cómo se resuelve este problema.

LETRA DE CAMBIO

El vendedor del producto → **extiende**

El comprador del producto → **acepta**

→ **la letra de cambio**

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Lo que gana el Banco (descuento):

$$D = \frac{N \cdot r \cdot t}{36.000} = \frac{60.000 \cdot 18 \cdot 90}{36.000} = 2.700 \text{ ptas.}$$

El vendedor recibe del Banco:

$$N - D = E$$

$$60.000 - 2.700 = 57.300$$

60.000 ptas. → **Valor nominal de la letra**

60.000 ptas. → **Paga el comprador**
2.700 ptas. → **Se queda el Banco**

57.300 ptas. → **Cobra el vendedor**

1. Resuelve estos problemas:

A. ¿Cuánto dinero dará el Banco por una letra de cambio de 10.000 ptas. que se ha de pagar dentro de 90 días si el Banco recibe el 5 % de descuento?

B. Una letra de cambio tiene un nominal de 50.000 ptas. y se descuenta al 8 %. ¿Cuál será el descuento y cuál el valor efectivo si faltan 60 días para el vencimiento?

C. Una persona entrega una letra de 120.000 ptas. a un Banco, que se la descuenta al 6 %. ¿Cuál es el descuento del Banco si faltan 60 días para el vencimiento?

Actividades

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Un empleado cobra 32.000 ptas. por 8 días de trabajo.
   ¿Cuánto cobrará por 20 días de trabajo?

2. Si 42 metros de tela cuestan 1.050 ptas.
   ¿cuántos metros de tela se pueden comprar con 450 ptas.? ¿Y con 250 ptas.?

3. Seis personas pueden vivir de pensión 12 días por 79.200 ptas.
   ¿Cuánto costará la pensión de 15 personas durante 8 días?

4. Ciento ochenta trabajadores fabrican en 20 días 6 máquinas.
   ¿Cuántas máquinas fabricarán 40 trabajadores en 30 días?

5. Cincuenta obreros construyeron un muro de 50 m en 10 días.
   ¿Cuántos metros de muro construirán 100 obreros con la misma capacidad en 8 días?

6. ¿En cuánto tiempo se triplica un capital al 6 %?

7. ¿Al cabo de cuántos días un capital colocado al 4 % producirá $\frac{1}{6}$ de su valor?

8. Calcula el capital que colocado al 5 % de interés simple durante 10 años se ha convertido en 30.000 ptas.

   Planteamiento $C + \frac{C \cdot 5 \cdot 10}{100} = 30.000$

9. Dos capitales, uno de 4.800 ptas. y el otro de 5.400 ptas., se prestan a intereses simples, el primero al 5 % y el segundo al 4 %.
   ¿Cuánto debe durar el préstamo para que estos capitales, junto con sus intereses respectivos, sean iguales?

   Completa el planteamiento $4.800 + \frac{4800 \cdot 5 \cdot t}{100} = 5.400 + \frac{\quad}{\quad}$

10. ¿Cuántos meses estuvo colocado un capital de 400.000 ptas. en un Banco si al 8 % produjo un interés de 8.000 ptas.?

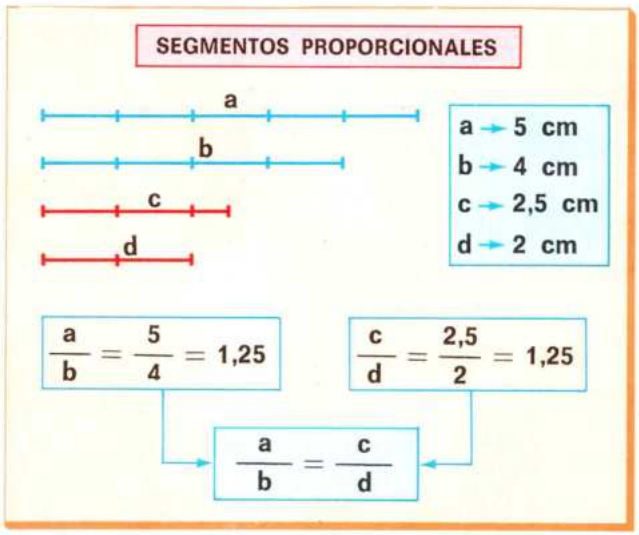
11. Una persona presenta a un banquero el 20 de junio una letra de cambio con vencimiento el 23 de agosto siguiente y recibe, deducido el descuento, 89.040 ptas.
    Halla el valor nominal de la letra, que ha sido descontada el 6 % anual.

12. A un banquero le presentan para su cobro el 11 de abril un pagaré cuyo vencimiento es el 1 de mayo. Deducido el correspondiente descuento al 5 % entrega 7.180 ptas.
    Halla el valor nominal del pagaré.

13. Un Banco ha concedido a un Ayuntamiento un préstamo de 3.000.000 de ptas. al 8 %.
    ¿A cuánto ascienden los intereses si se devuelve al cabo de 4 años? ¿Y si se devolviese al cabo de 5 años?

TEMA 15 PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS. TEOREMA DE THALES

1. Razones y proporciones de segmentos. Paralelas equidistantes



Razones y proporciones entre segmentos.

Observa los segmentos **a**, **b**, **c** y **d**.

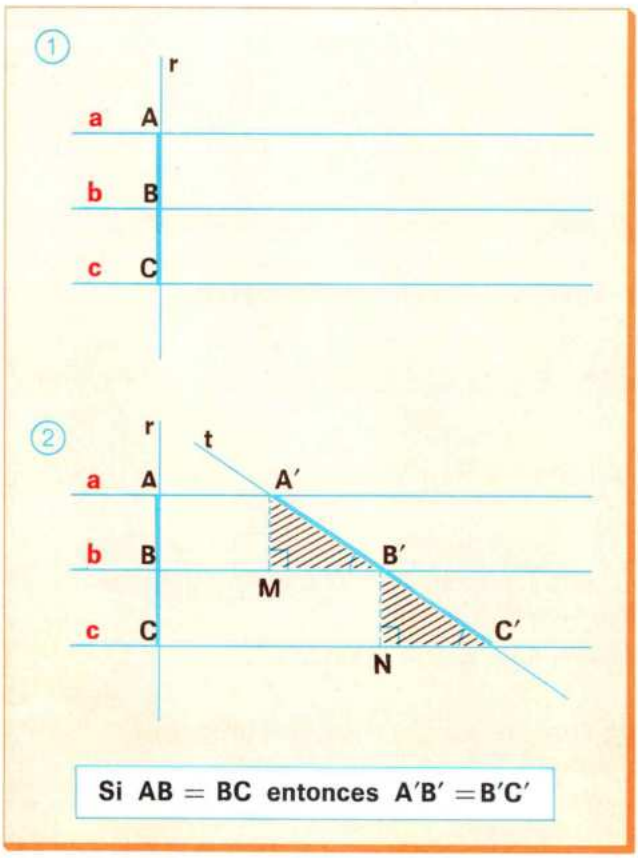
La razón de dos segmentos es igual al cociente de sus medidas.

- La razón de los segmentos **a** y **b** es $\frac{a}{b} = \frac{5}{4} = 1{,}25$.
- La razón de los segmentos **c** y **d** es $\frac{c}{d} = \frac{2{,}5}{2} = 1{,}25$.

Como las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son iguales, se dice que los segmentos **a** y **b** son **proporcionales** a los segmentos **c** y **d** y se escribe $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Esta proporción entre segmentos tiene las mismas propiedades que las proporciones numéricas.

Rectas secantes cortadas por paralelas equidistantes.



① Observa las rectas paralelas **a**, **b** y **c** y la secante **r**. Las paralelas determinan en la secante **r** dos segmentos iguales **AB** y **BC**: **AB = BC**.

② Veamos ahora que si las rectas paralelas **a**, **b** y **c** cortan a otra secante **t**, los segmentos **A'B'** y **B'C'** que las paralelas determinan en la secante también son iguales.

En efecto, los triángulos **A'MB'** y **B'NC'** son iguales, porque $\left.\begin{matrix} A'M = AB \\ B'N = BC \\ AB = BC \end{matrix}\right\}$ por lados opuestos de un paralelogramo.

Luego los triángulos rayados tienen los lados **A'M** y **B'N** iguales.

Como $\hat{C}' = \hat{B}'$ por correspondientes y $\hat{M} = \hat{N}$ por ser ángulos de lados paralelos, resulta que los dos triángulos **A'MB'** y **B'NC'** tienen los tres ángulos iguales y un lado igual, y por consiguiente son iguales.

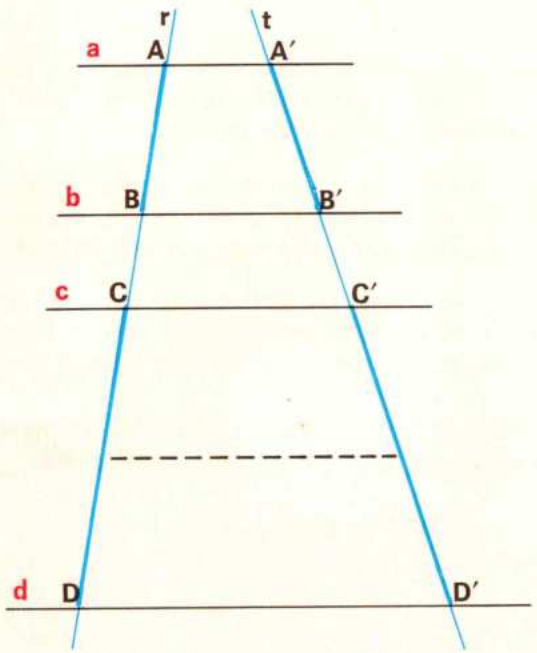
Por tanto: **A'B' = B'C'**

Si varias paralelas determinan en una secante segmentos iguales, entonces estas paralelas también determinan segmentos iguales sobre cualquier otra secante.

2. Teorema de Thales

Segmentos proporcionales entre paralelas.

TEOREMA DE THALES



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'} = k$$

Observa que las rectas paralelas **a**, **b**, **c** y **d** cortan a las dos rectas secantes **r** y **t**.

Considera los segmentos **AB** y **CD** de la recta **r**. Se observa que $CD = 2 \cdot AB$.

¿Qué relación hay entre los segmentos correspondientes **A'B'** y **C'D'**?

Observa que **C'D'** es también doble de **A'B'**:

$$C'D' = 2 \cdot A'B'$$

Observa también que con estos segmentos se puede escribir esta proporción:

$$\frac{CD}{C'D'} = \frac{2 \cdot AB}{2 \cdot A'B'} = \frac{AB}{A'B'}$$

Esta proporcionalidad existe entre todos los segmentos de la recta **r** y sus correspondientes de la recta **t**:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = k$$

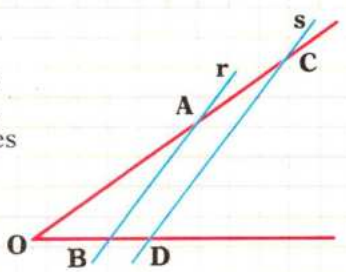
En estas proporciones **k** es la constante de proporcionalidad.

Observa que si los segmentos **AB, AC, BC,** etc., fueran iguales, también lo serían **A'B', B'C', A'C',** etc. Esto significa que la propiedad de las paralelas equidistantes es un caso particular del teorema de Thales.

Si varias paralelas son cortadas por dos rectas secantes, los segmentos que determinan en una de las secantes son proporcionales a los segmentos que determinan en la otra secante.

1. Lee atentamente y resuelve los problemas:

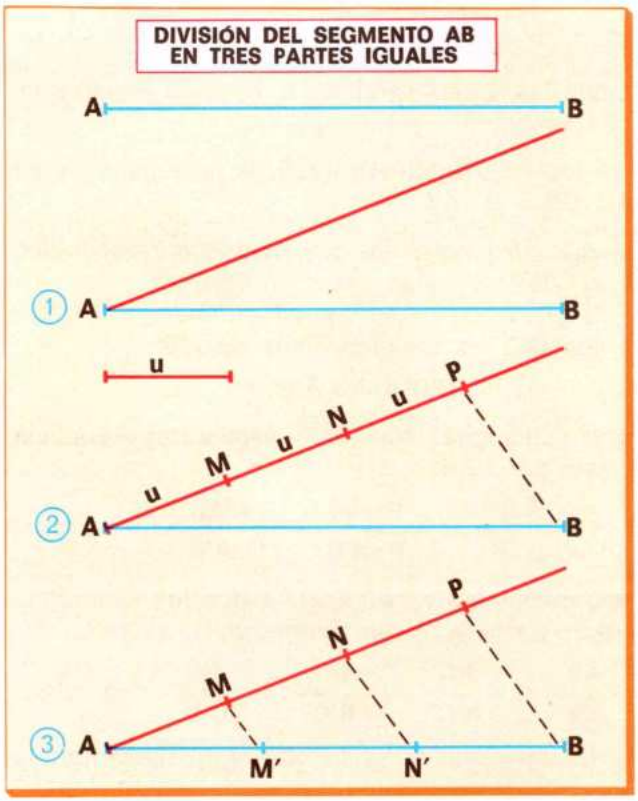
A. Las rectas paralelas **r** y **s** (en azul) son cortadas por dos secantes (en rojo). Si el segmento **OA** mide 8 unidades, el segmento **OB** 3 unidades y el segmento **OC** 12 unidades ¿cuánto medirá el segmento **OD**?



B. Si en la figura anterior fuese **AC** = 3 unidades, **OB** = 4 unidades y **BD** = 2 unidades ¿cuánto medirá **OA**?

C. Si en la misma figura fuese **OC** = 14 unidades, **OD** = 10 unidades y **BD** = 3 unidades ¿cuánto medirá **OA**?

División de un segmento en partes iguales.



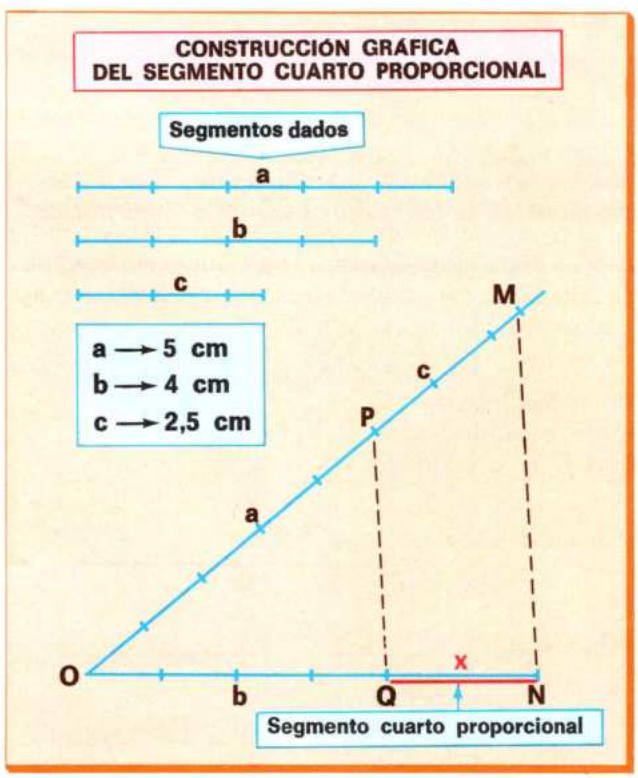
Vamos a dividir el segmento **AB** en tres segmentos iguales.

1. Para ello se traza una semirrecta cualquiera (semirrecta roja) con origen en **A** que forme con el segmento **AB** un ángulo menor de 180°.
2. Se elige un segmento **u** arbitrario, se lleva sobre la semirrecta roja tres veces y el punto **P**, correspondiente a la última división, se une con el punto **B.**
3. Finalmente se trazan paralelas a **PB** por los puntos de división **M** y **N** y se obtienen los puntos **M'** y **N'**, que dividen el segmento **AB** en tres partes iguales.

En efecto, como los segmentos **AM**, **MN** y **NP** son iguales, también lo serán los segmentos **AM'**, **M'N'** y **N'B**:

$$AM' = M'N' = N'B$$

Segmento cuarto proporcional.



Dados tres segmentos **a**, **b** y **c**, se llama segmento **cuarto proporcional** de **a**, **b** y **c** a otro segmento **x** que cumple la siguiente proporción:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Observa los segmentos **a**, **b** y **c**. Numéricamente ya sabemos calcular el cuarto proporcional *(ver tema 11)*:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \rightarrow \frac{5}{4} = \frac{2{,}5}{x} \rightarrow 5 \cdot x = 4 \cdot 2{,}5$$

$$5x = 10 \rightarrow x = \frac{10}{5} = 2$$

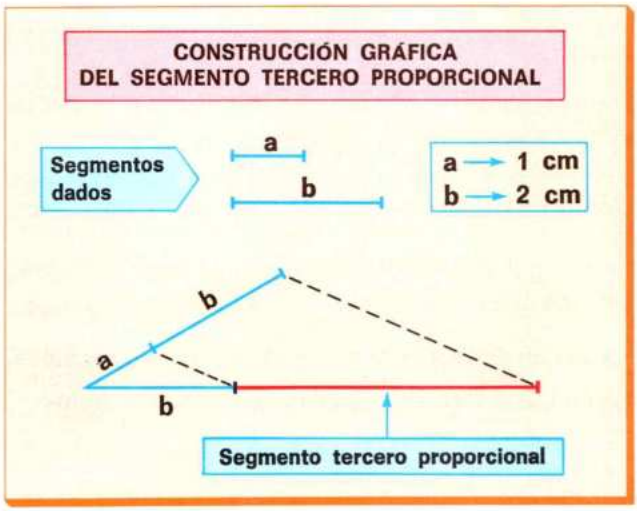
El cuarto proporcional es **2.**

Observa cómo se determina gráficamente el segmento cuarto proporcional.

1. Se trazan dos semirrectas de origen **O** y sobre ellas se llevan los segmentos **a**, **b** y **c** como indica la figura.
2. Se unen los extremos no comunes **P** y **Q** de **a** y **b** y por el extremo **M** de **c** se traza una paralela a **PQ**; el segmento **QN** = **x** es el segmento buscado. Compruébalo midiendo con la regla.

4. Aplicaciones del teorema de Thales. II

Segmento tercero proporcional.



Dados dos segmentos **a** y **b**, se llama **segmento tercero proporcional** de **a** y **b** a otro segmento **x** que cumple la siguiente proporción:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$$

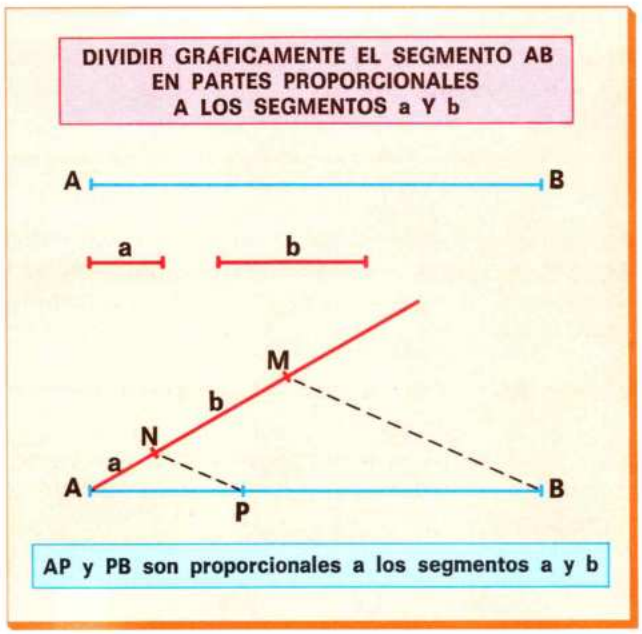
Observa los segmentos **a** y **b**. Numéricamente ya sabemos calcular el tercero proporcional:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{x} \rightarrow x = 4$$

El tercero proporcional es **4 cm.**

La construcción gráfica del tercero proporcional se hace como en el caso del cuarto proporcional.

División de un segmento en partes proporcionales a otros dados.



Vamos a dividir el segmento **AB** en partes proporcionales a los segmentos **a** y **b**.

Si **a** mide 1 cm, **b** mide 2 cm y **AB** mide 6 cm, el reparto directamente proporcional, numéricamente, es el siguiente:

$$\frac{6}{1+2} \cdot 1 = \frac{6}{3} \cdot 1 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\frac{6}{1+2} \cdot 2 = \frac{6}{3} \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4$$

El segmento de 6 cm queda dividido en dos segmentos: uno de 2 cm y otro de 4 cm.

Para resolver el problema gráficamente se traza una semirrecta con origen en el punto **A** (semirrecta roja) y sobre ella se llevan los segmentos **a** y **b**, uno a continuación del otro. El extremo **M** del segmento **b** se une con **B** y por **N** se traza una paralela a **MB**.

El segmento **AB** queda dividido en los segmentos **AP** y **PB**.

1. **Dibuja un segmento de 8 cm y divídelo en tres partes iguales.**

2. **Dibuja en cinco partes iguales los segmentos cuyas medidas son:**

   a) 8 cm b) 10 cm c) 12 cm d) 15 cm

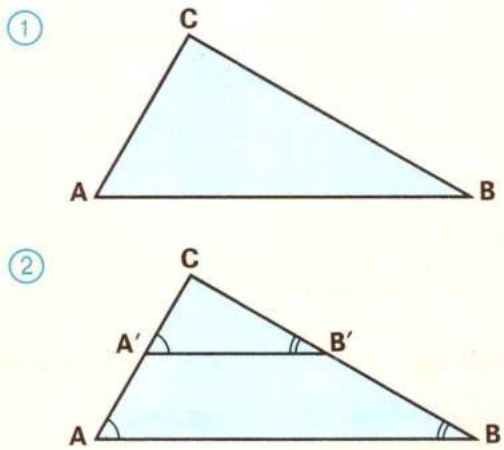
3. **Construye:**

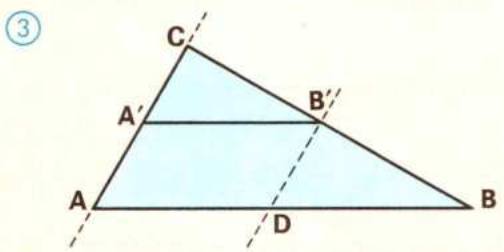
   A. Un segmento que sea cuarto proporcional de los segmentos **a** → 3, **b** → 5, **c** → 6.

   B. Un segmento **x** que sea tercero proporcional de 2 y de 4, es decir, que $\frac{2}{4} = \frac{4}{x}$

5. Triángulos en posición de Thales

TRIÁNGULOS EN POSICIÓN DE THALES ABC Y A'B'C





ABC y A'B'C en posición de Thales → $\frac{CA}{CA'} = \frac{CB}{CB'} = \frac{AB}{A'B'}$

Triángulos de Thales.

(1) Dibuja en tu cuaderno un triángulo como el triángulo **ABC.**

(2) Traza una paralela **A'B'** al lado **AB.** Así se forma un nuevo triángulo **CA'B'.**

Los triángulos **CAB** y **CA'B'** se dice que están en **posición de Thales** o que son triángulos de Thales.

Veamos que dos triángulos en posición de Thales tienen los ángulos iguales y los lados proporcionales:

Los ángulos de dos triángulos de Thales son iguales.

El ángulo **C** es el mismo para los dos triángulos:

$$\left.\begin{array}{l} A = A' \\ B = B' \end{array}\right\} \text{ por correspondientes}$$

(3) **Los lados de dos triángulos de Thales son proporcionales.**

Para ver la proporcionalidad de los lados tracemos por el punto **B'** una paralela **B'D** al lado **CA.** Entonces **A'B' = AD** por ser lados opuestos de un paralelogramo.

- Aplicando el teorema de Thales a las paralelas **AB A'B'**, cortadas por **CA** y **CB**, resulta la proporción a):

ⓐ $$\frac{CA}{CA'} = \frac{CB}{CB'}$$

- Aplicando el teorema de Thales a las paralelas **AC B'D**, cortadas por **CB** y **AB**, resulta:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{CB}{CB'}$$

y como **AD = A'B'** resulta la proporción b):

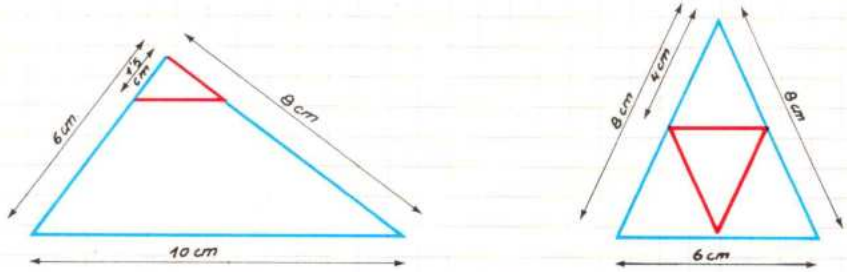
ⓑ $$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CB}{CB'}$$

De las proporciones a) y b) resulta:

$$\frac{CA}{CA'} = \frac{CB}{CB'} = \frac{AB}{A'B'}$$

Si dos triángulos están en posición de Thales, entonces sus ángulos son iguales y sus lados correspondientes son proporcionales.

1. Calcula en cada caso los segmentos de color rojo con los datos que aparecen en las figuras sabiendo que los triángulos están en posición de Thales.



Actividades

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Dibuja un segmento y divídelo en siete partes iguales.

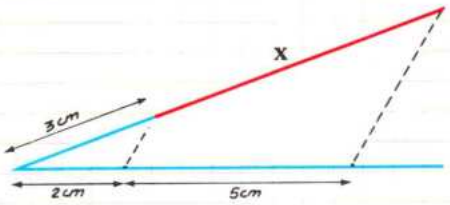
2. Construye un segmento **x** que sea cuarto proporcional a los segmentos

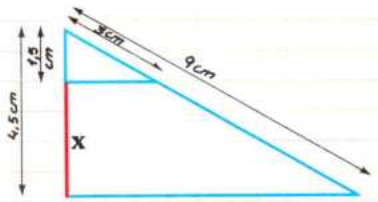
   a = 3 cm **b** = 4 cm **c** = 6 cm

   ¿Cuál es la longitud del segmento **x**?

3. Calcula numérica y gráficamente el segmento tercero proporcional de los segmentos cuyas longitudes son 9 cm y 6 cm.

4. Aplica el teorema de Thales para calcular la medida del segmento **x**



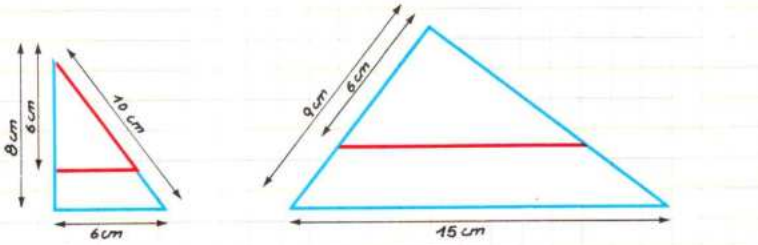


5. Calcula numérica y gráficamente el segmento cuarto proporcional de los segmentos

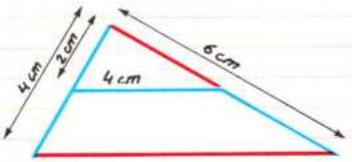
   a = 10 cm **b** = 8 cm **c** = 20 cm

6. Divide un segmento de 12 cm en partes proporcionales a los segmentos

   a → 1 cm **b** → 2 cm **c** → 3 cm

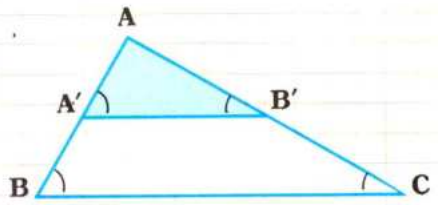


7. Sabiendo que los siguientes triángulos están en posición de Thales, halla las medidas de los segmentos de color rojo.



8. En el triángulo **ABC** se ha trazado el segmento **A'B'**, que une los puntos medios de los lados **AB** y **AC** (paralela media).

   Teniendo en cuenta que los triángulos **ABC** y **AA'B'** son triángulos en posición de Thales, prueba que **A'B'** es paralela a **BC** y que $\mathbf{A'B'} = \frac{\mathbf{BC}}{2}$



9. Divide un segmento de 18 cm en partes proporcionales a otros tres que miden 2 cm, 3 cm y 4 cm.

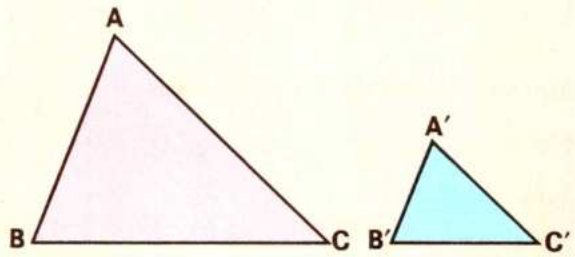
TEMA 16 SEMEJANZA. ESCALAS

1. Semejanza de triángulos. I

Triángulos semejantes. Razón de semejanza.

TRIÁNGULOS SEMEJANTES

$\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{A'B'C'}$



$\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{A'B'C'} \Rightarrow$

- $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{C} = \hat{C}'$
- $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$

Razón de semejanza $\dfrac{AB}{A'B'}$

Observa los triángulos **ABC** y **A'B'C'**. Comprueba:

- Que tienen los ángulos iguales:
  $\hat{A} = \hat{A}'$; $\hat{B} = \hat{B}'$; $\hat{C} = \hat{C}'$
- Que tienen los lados proporcionales:
  $AB = 2 \cdot A'B'$; $BC = 2 \cdot B'C'$; $AC = 2 \cdot A'C'$

Por tanto:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = 2$$

Los triángulos **ABC** y **A'B'C'** se llaman **triángulos semejantes.** Se escribe:

$\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{A'B'C'}$

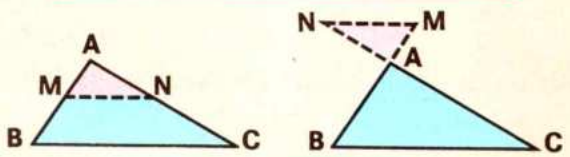
$\sim$ signo de semejanza

Los lados **AB** y **A'B'** se oponen a ángulos iguales y se llaman **lados homólogos.**

El cociente de dos lados homólogos $\dfrac{AB}{A'B'} = 2$ se llama **razón de semejanza.**

Semejanza de los triángulos en posición de Thales.

TRIÁNGULOS EN POSICIÓN DE THALES



$\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{AMN}$

Observa los triángulos **ABC** y **AMN**, que están en posición de Thales.

Recuerda que dos triángulos en posición de Thales tienen los ángulos iguales y los lados proporcionales; por tanto, dos triángulos en posición de Thales son **triángulos semejantes.**

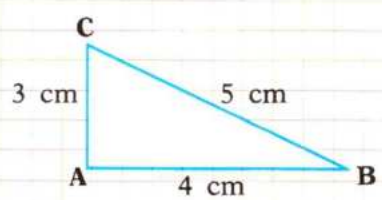
Dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos iguales y sus lados homólogos proporcionales.
Se llama razón de semejanza al cociente de dos lados homólogos.
Dos triángulos en posición de Thales son triángulos semejantes.

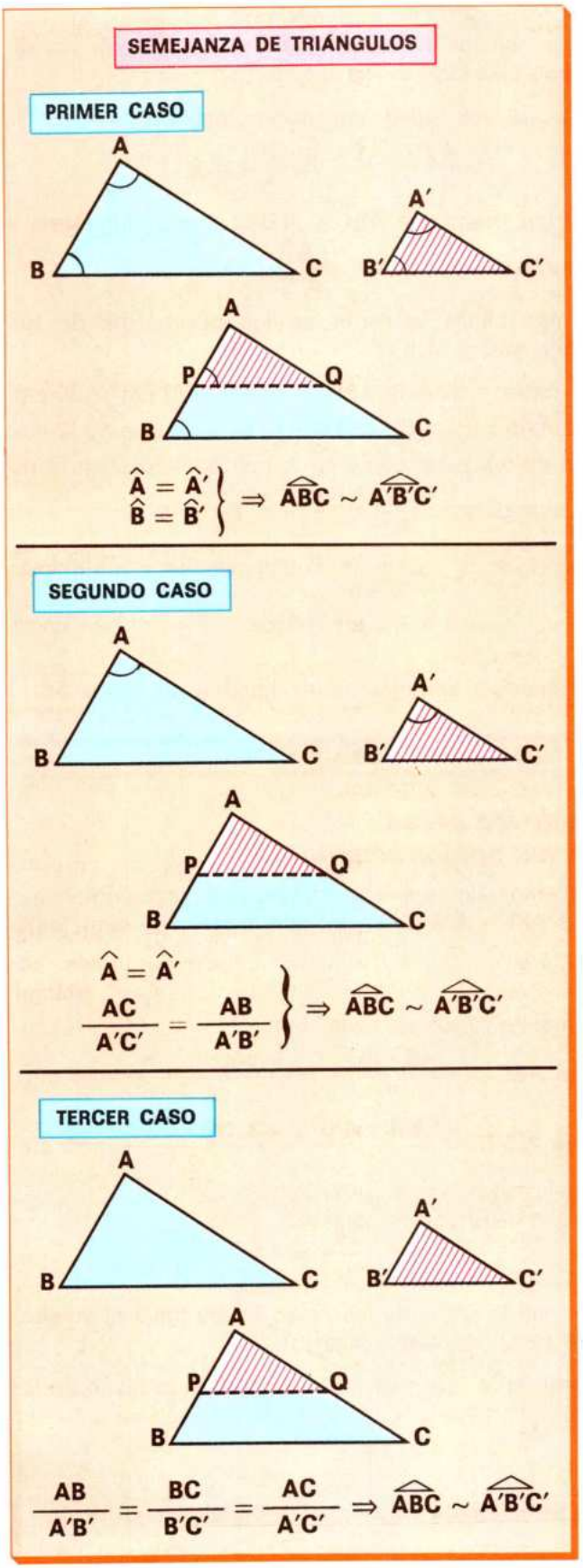
1. Resuelve los siguientes problemas:

A. Dos triángulos **ABC** y **A'B'C'** son semejantes. Sabiendo que $A = 60°$ y $B = 70°$, halla $\hat{A}'$, $\hat{B}'$, $\hat{C}'$.

B. Halla los lados del triángulo **A'B'C'**, semejante al triángulo **ABC** de la figura, sabiendo que **B'C'** = 30 cm.

¿Cuál es la razón de semejanza $\dfrac{AB}{A'B'}$?





Casos de semejanza de triángulos.

Acabamos de ver que dos triángulos son semejantes cuando tienen sus ángulos iguales y sus lados homólogos son proporcionales, es decir, cuando se verifican las seis condiciones siguientes:

① $\hat{A} = \hat{A}'$ ② $\hat{B} = \hat{B}'$ ③ $\hat{C} = \hat{C}'$

④ $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ ⑤ $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$ ⑥ $\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$

Para afirmar que dos triángulos son semejantes es suficiente con conocer que se cumplen algunas de estas seis condiciones, porque entonces se cumplen todas las demás.

Dichas condiciones suficientes se llaman **criterios** o **casos de semejanza.**

PRIMER CASO

Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales.

Consideremos los triángulos **ABC** y **A′B′C′**, en los cuales $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\hat{B} = \hat{B}'$.

Coloquemos el triángulo **A′B′C′** sobre el triángulo **ABC**, de modo que $\hat{A}'$ coincida con $\hat{A}$. Se forma así el triángulo **APQ**, que es igual al **A′B′C′**.

Ahora bien, como $\hat{P} = \hat{B}$, ya que ambos son iguales a $\hat{B}'$, resulta que los segmentos **PQ** y **BC** son paralelos y los triángulos **ABC** y **APQ** están en posición de Thales.

Por tanto, el triángulo **ABC** es semejante al triángulo **APQ**, y por tanto también es semejante al triángulo **A′B′C′**.

Para probar que los triángulos **A′B′C′** son semejantes hemos construido un triángulo **APQ** igual al **A′B′C′**, de modo que esté en relación con el **ABC** en posición de Thales.

En esta construcción se basa la demostración de los otros casos de igualdad.

SEGUNDO CASO

Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los dos lados que lo forman son proporcionales.

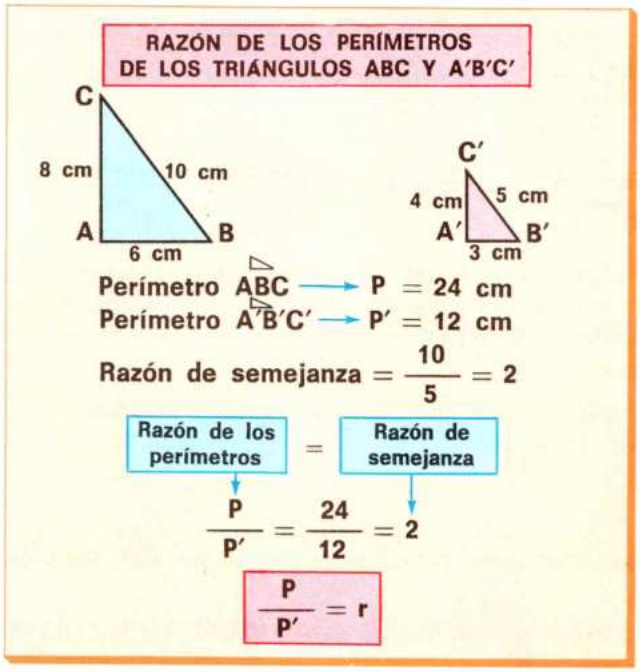
Al llevar el triángulo **A′B′C′** sobre el **ABC** de modo que $\hat{A} = \hat{A}'$ se forman dos triángulos **ABC** y **APQ** en posición de Thales.

TERCER CASO

Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados proporcionales.

Tomemos el segmento **AP** = **A′B′** y tracemos la paralela **PQ** a **BC.** Así se tienen dos triángulos en posición de Thales y todo se reduce a probar que los triángulos **APQ** y **A′B′C′** son iguales.

3. Razón de perímetros y razón de áreas de dos triángulos semejantes



Razón de los perímetros en dos triángulos semejantes.

Consideremos los triángulos **ABC** y **A'B'C'**, con las dimensiones que indican las figuras.

Observa que sus lados son proporcionales:

$$\frac{8}{4} = \frac{6}{3} = \frac{10}{5} = 2$$

Por eso los triángulos **ABC** y **A'B'C'** son semejantes, y la razón de semejanza es: $\frac{AC}{A'C'} = \frac{8}{4} = 2$.

Calculemos ahora la razón de los perímetros de los triángulos **ABC** y **A'B'C'**.

P = perímetro triángulo **ABC** → (8+6+10) cm = 24 cm.

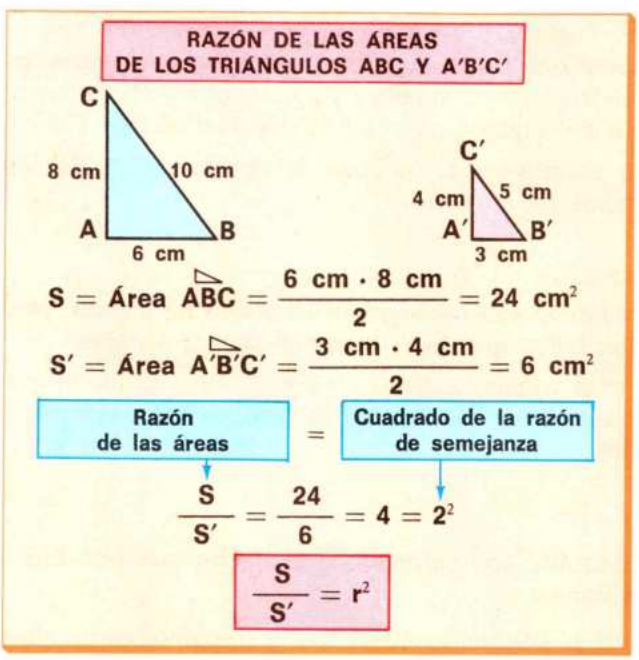
P' = perímetro triángulo **A'B'C'** → (4+3+5) cm = 12 cm.

La razón de los perímetros es 2, que coincide con la razón de semejanza: $\frac{P}{P'} = \frac{24}{12} = 2$.

En general, si la razón de semejanza es **r**, entonces:

$$\frac{P}{P'} = r$$

La razón de los perímetros de dos triángulos semejantes es igual a su razón de semejanza.



Razón de las áreas en dos triángulos semejantes.

Consideremos de nuevo los triángulos rectángulos semejantes **ABC** y **A'B'C'**, en los que la razón de semejanza es $\frac{8}{4} = 2$.

Calculemos el área de cada uno:

$$S = \text{área } ABC = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{6 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm}}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

$$S' = \text{área } A'B'C' = \frac{A'B' \cdot A'C'}{2} = \frac{3 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm}}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

La razón de las áreas es:

$$\frac{S}{S'} = \frac{24}{6} = 4 = 2^2$$

Observa que la razón de las áreas (4) es igual al cuadrado de la razón de semejanza (2).

En general, si la razón de semejanza es **r**, la razón de las áreas es:

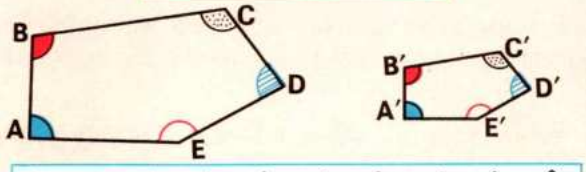
$$\frac{S}{S'} = r^2$$

La razón de las áreas de dos triángulos semejantes es igual al cuadrado de su razón de semejanza.

4. Polígonos semejantes. Construcción de polígonos semejantes

Polígonos semejantes.

POLÍGONOS SEMEJANTES



$$\hat{A} = \hat{A}',\ \hat{B} = \hat{B}',\ \hat{C} = \hat{C}',\ \hat{D} = \hat{D}',\ \hat{E} = \hat{E}'$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

Dos polígonos **ABCDE** y **A'B'C'D'E'** son semejantes si tienen:

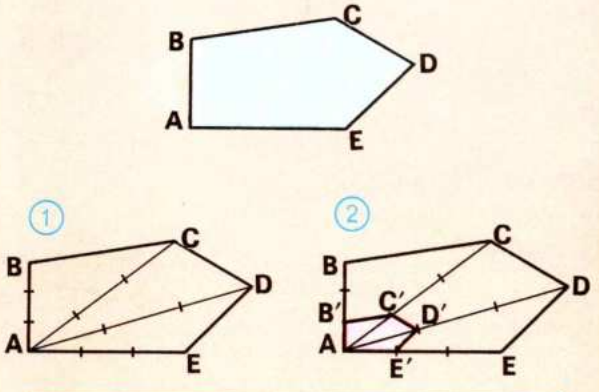
- Los ángulos iguales:
  $\hat{A} = \hat{A}'$; $\hat{B} = \hat{B}'$; $\hat{C} = \hat{C}'$; $\hat{D} = \hat{D}'$; $\hat{E} = \hat{E}'$
- Los lados homólogos proporcionales:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

Dos polígonos son semejantes cuando tienen los ángulos iguales y los lados homólogos proporcionales.

Construcción de polígonos semejantes.

CONSTRUCCIÓN DEL POLÍGONO A'B'C'D'E' SEMEJANTE AL ABCDE



Polígono ABCDE ~ Polígono A B'C'D'E'

Vamos a construir un polígono semejante al polígono **ABCDE** con razón de semejanza $\frac{BC}{B'C'} = 3$.

① Se trazan las diagonales y se dividen en tres partes iguales dichas diagonales y los lados **AB** y **AE.**

② Se unen los puntos **B'**, **C'**, **D'** y **E'** como indica la figura.

En los polígonos semejantes ocurre como en el triángulo rectángulo:

- Que la razón de los perímetros de dos polígonos semejantes es igual a su razón de semejanza.
- Que la razón de las áreas de dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de su razón de semejanza.

1. Resuelve los siguientes problemas:

A. Si dos triángulos **ABC** y **A'B'C'** son semejantes y la razón de semejanza del primero al segundo es $\frac{3}{4}$ ¿cuál será el área del triángulo **A'B'C'** si la del **ABC** es 126 cm²?

Sugerencia $\frac{S}{S'} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$

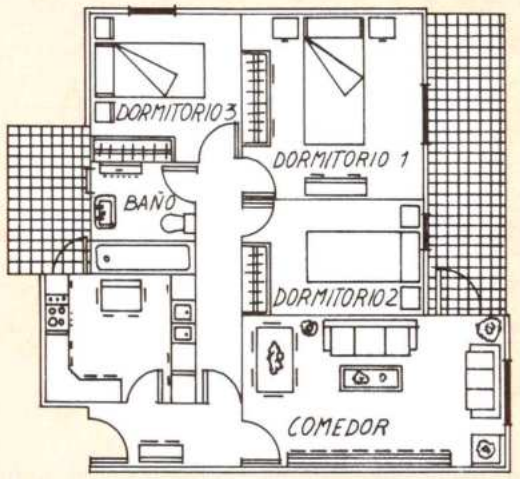
B. Los lados de un triángulo **A'B'C'** miden el triple que los del triángulo **ABC.** Si la superficie de **A'B'C'** es 36 cm² ¿cuál es la razón de semejanza de los triángulos **ABC** y **A'B'C'**? ¿Cuál es el área del triángulo **ABC**?

C. La razón de las áreas de dos polígonos semejantes es $\frac{16}{25}$.
¿Cuál es la razón de dos lados homólogos?

5. Escalas

La escala como razón de semejanza.

PLANO DE UN PISO ESCALA: 1:200



Los mapas, fotografías, planos, etc., son representaciones de figuras u objetos reales por medio de figuras semejantes.

La escala es la razón de semejanza entre el dibujo y el objeto real.

Conociendo la razón de semejanza o escala con la que se construyen los planos o mapas es posible conocer las dimensiones reales a partir de las dimensiones correspondientes en los planos.

La figura representa el plano de un piso a escala 1 : 200.

Las dimensiones del comedor en el dibujo son:

3,5 cm de largo y 2 cm de ancho

Por tanto, las dimensiones reales del comedor serán:

$3{,}5 \text{ cm} \times 200 = 700 \text{ cm} = 7 \text{ m}$ de largo

$2 \text{ cm} \times 200 = 400 \text{ cm} = 4 \text{ m}$ de ancho

1. Calcula:

- Los metros cuadrados que tiene el comedor en la realidad.
- El largo y ancho del dormitorio (1) en la realidad.
- El largo y ancho del dormitorio (2) en la realidad.
- Los metros cuadrados de los dormitorios (1) y (2) en la realidad.
- Los metros cuadrados que tiene el cuarto de baño.

2. Resuelve los siguientes problemas:

A. Un plano está hecho a una escala $\frac{1}{100}$. En el terreno, la distancia entre dos puntos es 120 metros.
¿Cuál será la distancia entre estos mismos puntos en el plano?
¿Y si cada centímetro representa 1 m? ¿Y si representa 1 km?

B. En un mapa de España de escala 1 : 8.000.000 la distancia sobre el mapa de Madrid a Burgos es 2,66 cm.
¿Cuál es la distancia real de Madrid a Burgos?

C. La distancia de Madrid a Zaragoza, que es de 320 km, viene representada en un mapa por una distancia de 128 cm.
¿A qué escala está construido el mapa?

3. Calcula:

Se ha construido el plano de una habitación rectangular que tiene 9 m de largo por 6 m de ancho. En el plano, el largo de la habitación es 12 cm.

- ¿Cuál es la escala a que se ha construido el plano?
- ¿Cuál es el ancho de la habitación en el plano?

Actividades

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Dos triángulos **ABC** y **A'B'C'** son semejantes. Se saben las siguientes medidas:

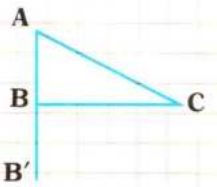
   AB → 60 cm; **BC** → 40 cm; **AC** → 60 cm; **A'B'** → 45 cm

   Calcula la longitud de los lados **B'C'** y **A'C'** del triángulo **A'B'C'**.

2. Los lados de un triángulo **ABC** miden **a** → 5 cm, **b** → 6 cm y **c** → 9 cm.

   Calcula los lados de otro triángulo **A'B'C'** semejante al anterior sabiendo que su perímetro es 60 cm.

3. Termina de dibujar el triángulo **AB'C'**, semejante al triángulo **ABC**, de modo que $\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{AB'}} = \frac{1}{2}$

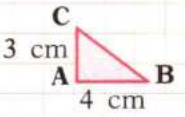


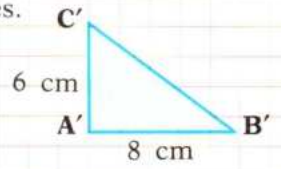
4. De dos triángulos **ABC** y **A'B'C'** se conocen las siguientes medidas:

   AB → 12 cm; **A'B'** → 16 cm; **BC** → 27 cm; **B'C'** → 36 cm; $\widehat{B} = \widehat{B'}$

   Prueba que son dos triángulos semejantes. ¿Qué caso de semejanza aplicas?

5. Comprueba que los triángulos **ABC** y **A'B'C'** son semejantes. ¿Qué caso de semejanza aplicas?





6. Dibuja un triángulo **ABC** y después construye otro triángulo **A B'C'** semejante a **ABC**, de modo que **ABC** y **A B'C'** estén en posición de Thales y tales que $\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{A\,B'}} = 3$.

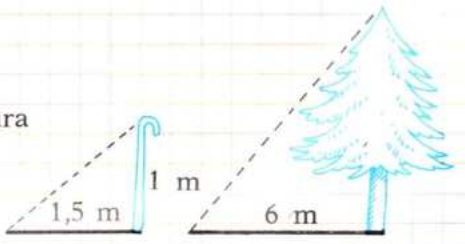
7. Los lados de un triángulo miden 8, 10 y 16 cm. Calcula los lados de otro triángulo semejante a éste de modo que su perímetro sea 68 cm.

8. Las áreas de dos polígonos son 36 cm^2 y 81 cm^2. Si el perímetro del primero es 24 cm ¿cuál es el perímetro del segundo?

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. Se sabe que en un día soleado, un bastón de 1 m de altura produce una sombra de 1,5 m.

   ¿Cuál será la altura de un pino cuya sombra mida 6 m?



2. Un poste de 2 m da una sombra de 3 m. ¿Cuál será la altura de otro poste que en el mismo instante da una sombra de 4,5 m?

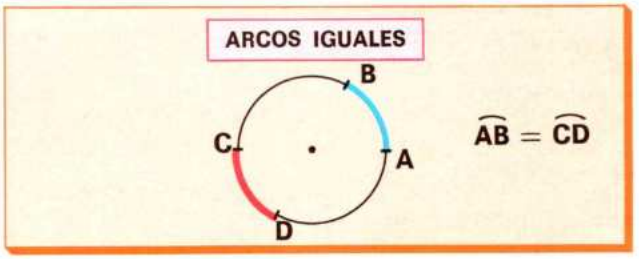
3. En un mapa de escala 1 : 10.000.000 la distancia entre dos ciudades es 12 cm.

   ¿Cuál será la distancia real entre ambas ciudades?

TEMA 17 LONGITUD DE ARCOS

1. Ángulos centrales y arcos correspondientes

Igualdad de los arcos.

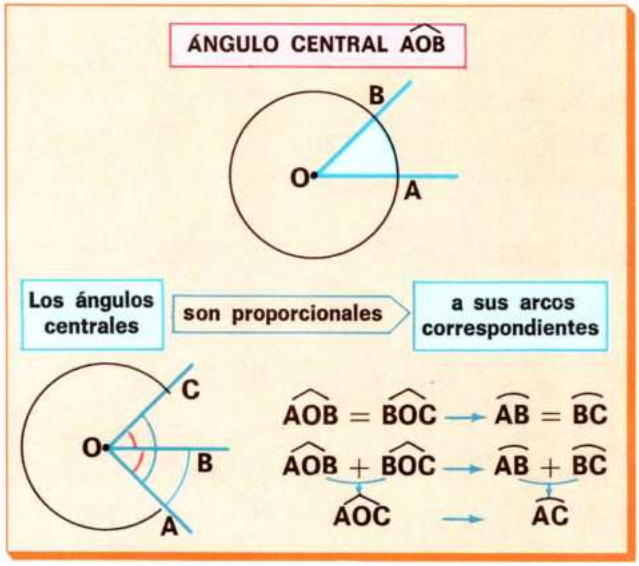


Observa los arcos $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{CD}$.

Calca en un papel transparente el arco $\overset{\frown}{AB}$ y comprueba que coincide con el arco $\overset{\frown}{CD}$ al llevarlo sobre él.

Por eso los arcos $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{CD}$ son arcos iguales.

Ángulo central.



El ángulo $\hat{AOB}$ tiene su vértice en el centro **O** de la circunferencia, y por eso se llama **ángulo central.**

Este ángulo determina en la circunferencia el arco $\overset{\frown}{AB}$, que se llama **arco correspondiente** al ángulo central $\hat{AOB}$.

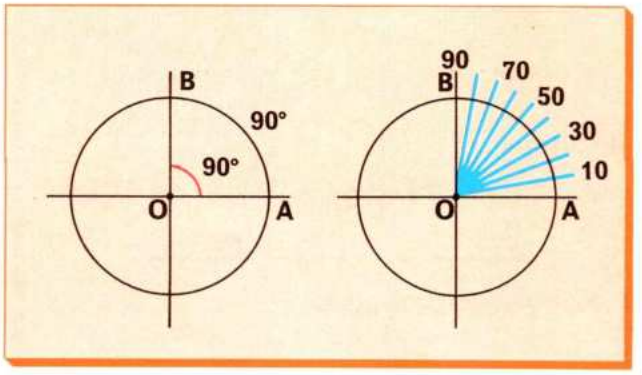
Observa los ángulos centrales iguales $\hat{AOB}$ y $\hat{BOC}$ en la circunferencia de centro **O**. Comprueba con un papel transparente que los arcos correspondientes son también iguales: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$.

Observa también que al ángulo central $\hat{AOC}$, que es la suma de $\hat{AOB}$ y $\hat{BOC}$, le corresponde el arco $\overset{\frown}{AC}$, que es la suma de los arcos $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{BC}$.

Por eso los ángulos centrales y sus arcos correspondientes son directamente proporcionales.

En una circunferencia, si dos ángulos son iguales, sus arcos correspondientes también son iguales. Los ángulos centrales de una circunferencia y sus arcos correspondientes son proporcionales.

Medida de un ángulo central.



En la circunferencia se han trazado dos diámetros perpendiculares. Por ello, el ángulo central $\hat{AOB}$ es un ángulo recto. Si se divide este ángulo en 90 partes iguales, cada uno de los ángulos formados mide 1 grado.

El arco $\overset{\frown}{AB}$ también queda dividido en 90 partes iguales, y cada uno de estos arcos también mide 1 grado.

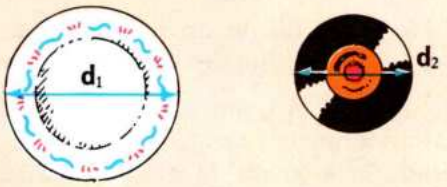
En general, si se toma como unidad un ángulo central y su correspondiente arco, la medida de cualquier ángulo central es igual a la de su arco correspondiente.

La medida de un ángulo central es la misma que la de su arco correspondiente.

2. Longitud de la circunferencia

Longitud de la circunferencia. Fórmulas.

FÓRMULA DE LA LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA



L_1 → Longitud del borde del plato
L_2 → Longitud del borde del disco

$$\frac{L_1}{d_1} = \frac{L_2}{d_2} = 3{,}14\ldots$$

$$L = d\,\pi$$
$$L = 2\,\pi\,r$$

Averigua lo que mide la longitud del borde de un plato, de un disco, etc., rodeándolo con un hilo. Mide también el diámetro de estos objetos.

Comprueba que en todos los casos el cociente entre la longitud del borde y el diámetro es el mismo número.

Este número se designa por π y su valor aproximado es **3,14.**

En general, llamando:

L → longitud de la circunferencia,
d → diámetro,

se tiene que:

$$\frac{L}{d} = \pi, \text{ de donde } L = d \cdot \pi$$

y como $d = 2 \cdot r$, resulta $L = 2 \cdot \pi \cdot r$.

La longitud de una circunferencia es igual al producto de su diámetro por el número π.

1. Calcula la longitud de la circunferencia en los siguientes casos:

a) $d = 6$ cm b) $r = 4$ cm c) $d = \frac{1}{2}$ cm d) $r = 0{,}5$ cm

2. La longitud de una circunferencia es 18,14 cm. Calcula:

a) El radio y el diámetro.
b) La longitud de la semicircunferencia.
c) La longitud de un arco de 90° (cuadrante).

3. Resuelve estos problemas:

A. La distancia media de la Tierra al Sol es de 150 millones de kilómetros.
Calcula:
- La longitud del camino que recorre la Tierra al dar una vuelta alrededor del Sol en su movimiento de traslación.
- La longitud aproximada del camino que recorre la Tierra en su movimiento de traslación en 1 día.
- La longitud del camino que recorre la Tierra en 1 hora.

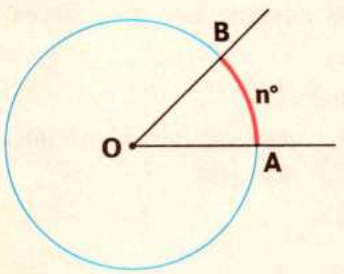
B. Suponiendo la Tierra esférica y que los meridianos miden 40.000 km, calcula el valor aproximado del radio de la Tierra.

C. La rueda de un tractor mide 60 cm de radio.
¿Cuánto ha avanzado el tractor cuando la rueda ha dado 1.000 vueltas?

D. Las ruedas de un coche tienen 40 cm de radio.
¿Cuántas vueltas tiene que dar cada rueda para recorrer 75.360 metros?
(Toma $\pi = 3{,}14$.)

3. Longitud y amplitud de un arco. I

FÓRMULA DE LA LONGITUD DE UN ARCO



Arco $\overset{\frown}{AB}$ de n grados

$$L_{arco} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot n}{360}$$

Longitud de un arco cuando la amplitud viene expresada en grados.

La longitud (**L**) de la circunferencia de radio **r** es:

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r$$

¿Cuál será la longitud de un arco de 1 grado en esta circunferencia? ¿Y la longitud de un arco $\overset{\frown}{AB}$ de **n** grados?

Como una circunferencia tiene 360°, si se divide la longitud de la circunferencia por 360, el cociente obtenido será la longitud del arco de un grado de esa circunferencia, entonces:

$$\text{longitud del arco de 1 grado} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{360}$$

Luego:

$$\textbf{long. del arco } \overset{\frown}{AB} \textbf{ de n grados} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{360} \cdot n = \frac{\pi \cdot r \cdot n}{180}$$

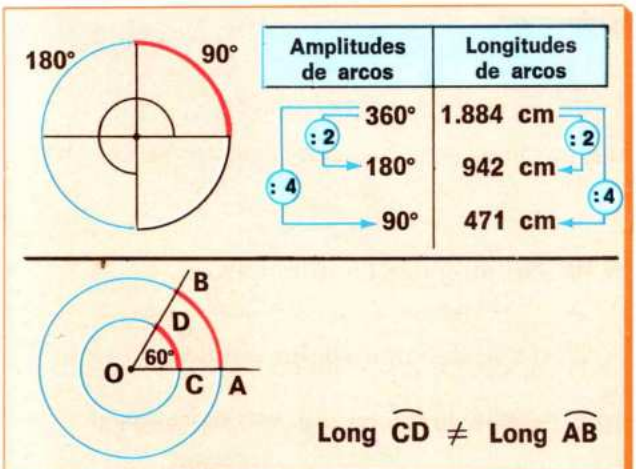
Ejemplo

¿Cuál es la longitud de un arco de 60° en una circunferencia de **r** = 12 cm?

Longitud del arco:

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot 12 \cdot 60}{360} = 4 \cdot \pi = 4 \times 3{,}14 = 12{,}56 \text{ cm}$$

Amplitud y longitud de un arco.



Observa la tabla en la que aparecen las amplitudes de varios arcos de una circunferencia de 300 cm de radio y sus longitudes correspondientes.

Longitud de la circunferencia: $2 \cdot 3{,}14 \times 300 =$ **1.884 cm**.

Se observa que en una misma circunferencia las amplitudes de los arcos y sus longitudes son directamente proporcionales.

Nota: Si los arcos pertenecen a circunferencias distintas, ya no hay proporcionalidad. Así, los arcos $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{CD}$ tienen 60° de amplitud, la misma que la del ángulo central $\widehat{AOB}$; sin embargo, los arcos $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{CD}$ tienen diferente longitud.

En una circunferencia las amplitudes de los arcos y sus longitudes son directamente proporcionales.

1. En una circunferencia de 12 cm de radio, calcula las longitudes de los arcos siguientes:

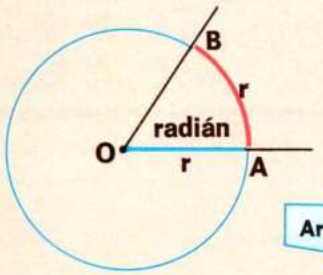
a) de 180° c) de 60° e) de 15° g) de 45° i) de 75°

b) de 90° d) de 30° f) de 42° h) de 36° j) de 24°

4. Longitud y amplitud de un arco. II

El radián.

RADIÁN



Arco $\overset{\frown}{AB}$ extendido

long $\overset{\frown}{AB}$ = long r

	Grados	Radianes
1 circunferencia	360°	2π
1 semicircunferencia	180°	π
1 ángulo recto	90°	$\frac{\pi}{2}$
1 ángulo de amplitud	45°	$\frac{\pi}{4}$

Observa la circunferencia de centro **O**. Un ángulo central como el $\widehat{AOB}$, en el cual la longitud de su arco correspondiente es igual a la longitud del radio, se llama **radián.**

El arco $\overset{\frown}{AB}$ también se llama radián.

¿Cuántos radianes tiene una circunferencia?

Como la longitud de la circunferencia de radio **r** es $2 \cdot \pi \cdot r$, la circunferencia tendrá tantos radianes como veces podamos llevar sobre ella la longitud del radio.

Para averiguar los radianes que tiene una circunferencia basta dividir su longitud por la longitud de su radio.

Número de radianes de la circunferencia:

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{r} = 2\ \pi$$

El problema de pasar de grados a radianes o de radianes a grados se reduce a una regla de tres simple directa:

Ejemplo ¿Cuántos radianes son 45°?

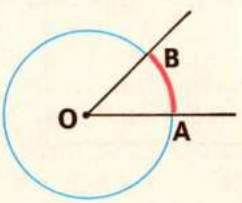
Si 360° $\xrightarrow{\text{son}}$ $2 \cdot \pi$ radianes

45° $\xrightarrow{\text{serán}}$ x

$$x = \frac{2 \cdot \pi \cdot 45}{360} = \frac{\pi}{4} \text{ radianes}$$

Longitud de un arco cuando la amplitud viene expresada en radianes.

FÓRMULA DE LA LONGITUD DEL ARCO



Arco $\overset{\frown}{AB}$ → n grados → x radianes

Longitud arco $\overset{\frown}{AB} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot n}{360}$ — n en grados

Longitud arco $\overset{\frown}{AB} = x \cdot r$ — x en radianes

Observa el arco $\overset{\frown}{AB}$ de **n** grados sexagesimales.

Esta es la fórmula para calcular la longitud del arco:

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot n}{360}$$

Por tanto:

$$\text{longitud del arco } \overset{\frown}{AB} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot n}{360}$$

Pasemos los **n** grados a radianes:

Si 360° $\xrightarrow{\text{son}}$ $2 \cdot \pi$ radianes

n grados $\xrightarrow{\text{serán}}$ x radianes

$$\frac{360}{n} = \frac{2 \cdot \pi}{x}, \text{ de donde } x = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{360}$$

Por tanto, cuando la amplitud del arco se expresa en radianes la fórmula de su longitud es:

$$\text{longitud del arco} = \frac{2 \cdot \pi \cdot n \cdot r}{360} = x \cdot r$$

La longitud de un arco es igual al producto de la amplitud del arco en radianes por el radio.

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

1. Calcula en cada caso el radio de la circunferencia conociendo el diámetro:

① $d = 7$ cm ② $d = 9$ cm ③ $d = 38$ cm ④ $d = 46$ cm ⑤ $d = 56$ cm

2. Calcula en cada caso la longitud aproximada de la circunferencia conociendo el radio o el diámetro:

① $r = 6$ cm → $L = 12\,\pi$ ③ $d = 7$ cm ⑤ $r = 8$ cm ⑦ $r = 10$ cm

② $r = 8$ cm ④ $d = 9$ cm ⑥ $r = 9$ cm ⑧ $r = 20$ cm

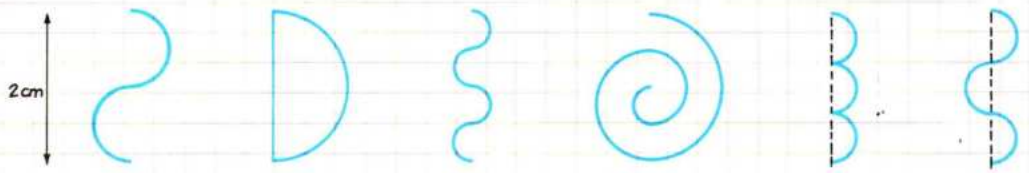
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Si el diámetro de una circunferencia es 8 cm, ¿cuál es su longitud? ¿Y si el diámetro es 16 cm?

2. Si el radio de una circunferencia se multiplica por 2, ¿qué le pasa a la longitud de la circunferencia?

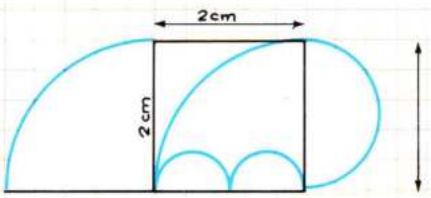
3. La rueda trasera de un tractor tiene un radio triple que la rueda delantera. Cuando la rueda grande ha dado 60 vueltas, ¿cuántas ha dado la rueda pequeña?

4. ¿Cuánto miden las siguientes curvas?



5. Dibuja en tu cuaderno un segmento **AB** de 10 cm. Traza una circunferencia con centro en **A** y radio 3 cm y otra con centro en **B** y radio 8 cm.
¿Cuál es la longitud de estas circunferencias?

6. Calcula la longitud de los arcos de la figura.



7. Expresa en radianes:

a) 120° b) 180° c) 150° d) 270°

8. Expresa en grados:

a) π radianes. b) $\frac{3 \cdot \pi}{2}$ radianes. c) $4\,\pi$ radianes.

9. En una circunferencia de 90 cm de radio calcula las longitudes de los arcos de:

a) $\frac{\pi}{2}$ radianes. b) $\frac{\pi}{3}$ radianes. c) $\frac{\pi}{5}$ radianes. d) $\frac{\pi}{6}$ radianes.

10. La longitud de una circunferencia es 60 cm. Halla la longitud de un arco de dicha circunferencia que tenga 60°.

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

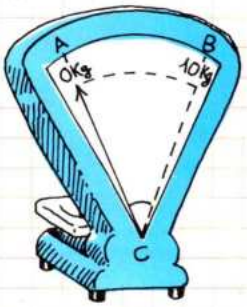
1. Las aspas de un molino de viento tienen 5 m de largo.

Si el molino gira a 27 revoluciones por minuto, ¿cuál es la velocidad en m/s de un punto situado en el extremo del aspa?

2. Los brazos de un columpio miden 1,8 m de largo y pueden describir como máximo un ángulo de 146°.

¿Cuál es el recorrido del asiento del columpio cuando el ángulo descrito en su balanceo es el máximo? ¿Y cuando el ángulo es de 70°?

3. En la balanza de la figura, la aguja mide 32 cm y el ángulo $\widehat{ACB}$ 72°.



Determina el peso registrado cuando la aguja indica un punto **P** sobre el arco $\overset{\frown}{AB}$ si:

a) El ángulo $\widehat{ACP}$ es de 40°.

b) El arco $\overset{\frown}{AP}$ es de 12 cm.

c) El arco $\overset{\frown}{AP}$ tiene igual longitud que la aguja.

4. Los caballitos de un tiovivo están situados en dos circunferencias concéntricas cuyos radios son, respectivamente, 2,3 y 3,5 metros. El tiovivo da 15 vueltas por minuto.

- ¿Cuál es la velocidad, en metros por segundo, de un caballito en cada una de las circunferencias?
- ¿Cuál es la longitud recorrida por cada uno en 3 minutos de funcionamiento?

5. Las agujas de un reloj miden 1 cm y 8 mm, respectivamente.

a) Si la aguja pequeña describe un ángulo de 22° en 40 minutos, ¿adelanta o atrasa el reloj?

b) Si el reloj funciona correctamente, ¿qué ángulo describe cada aguja en 20 minutos? ¿Qué longitud recorre el extremo de cada aguja en 20 minutos?

6. Un faro barre con su luz un ángulo plano de 128°.

A 6 millas marinas del faro ¿cuál es la longitud del arco de circunferencia en donde se percibe su luz? ¿Y a 4 millas marinas del faro?

Si el alcance máximo del faro es de 7 millas, ¿cuál es la longitud máxima del arco correspondiente? (1 milla marina = 1.852 metros.)

7. Los nuevos satélites artificiales geoestacionarios se encuentran permanentemente en la vertical de un punto sobre la Tierra.

a) Si un satélite geoestacionario está a 18.000 km sobre la Tierra, ¿cuál es aproximadamente la longitud de su órbita?

¿Cuál es aproximadamente su velocidad en kilómetros por segundo?

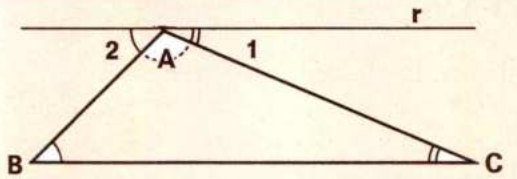
b) Dos satélites geoestacionarios están a 20.000 km sobre la Tierra. Uno sobre la vertical de un punto del ecuador y el otro sobre la vertical del polo Norte. ¿Cuál es la longitud del arco que los une tomando como centro el centro de la Tierra?

TEMA 18 ÁNGULOS EN LOS POLÍGONOS Y EN LA CIRCUNFERENCIA

1. Ángulos en los triángulos

Suma de los ángulos de un triángulo.

SUMA DE LOS ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO



$\hat{A} + \hat{2} + \hat{1} = 180°$

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

Los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ se llaman **ángulos internos o interiores** del triángulo.

Recuerda que en un triángulo **ABC** la suma de sus ángulos internos es 180°.

Si en el triángulo **ABC** se traza una paralela **r** al lado **BC** se tiene:

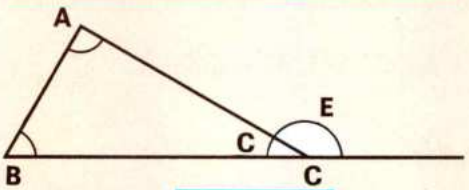
$\left.\begin{matrix}\hat{1} = \hat{C} \\ \hat{2} = \hat{B}\end{matrix}\right\}$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas.

Y como $\hat{1} + \hat{A} + \hat{2}$ = un ángulo llano = 180°,

resulta $\hat{C} + \hat{A} + \hat{B} = 180°$.

Ángulo exterior de un triángulo.

ÁNGULO EXTERIOR DE UN TRIÁNGULO



$\hat{E} = \hat{A} + \hat{B}$

En el triángulo **ABC** se ha prolongado el lado **BC**. El lado **AC** y la prolongación del lado **BC** forman un ángulo **E**, que es un **ángulo exterior** del triángulo **ABC**.

Observa que:

$\hat{E} + \hat{C} = 180°$ por ser ángulos adyacentes

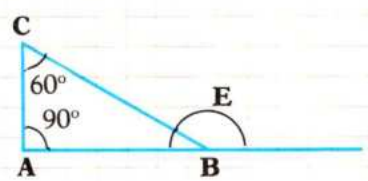
y que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

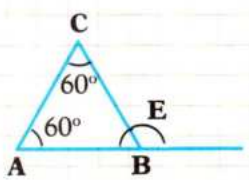
por tanto $\hat{E} = \hat{A} + \hat{B}$

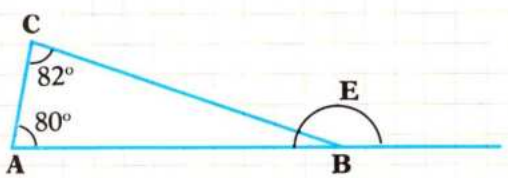
Ángulo exterior de un triángulo es el ángulo formado por un lado y la prolongación del otro que se une a él.

En todo triángulo, un ángulo exterior es igual a la suma de los dos ángulos del triángulo que no le son adyacentes.

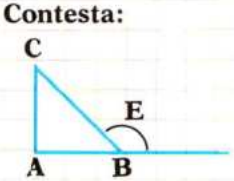
1. Calcula en cada triángulo lo que miden el ángulo $\hat{B}$ y el ángulo exterior dibujado:







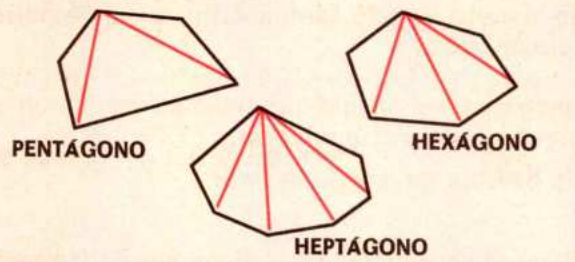
2. Contesta:



a) ¿Cuánto valen los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo?

b) ¿Cuánto vale el ángulo exterior $\hat{E}$ en el triángulo rectángulo isósceles **ABC**?

2. Ángulos en polígonos



Polígonos	Número de lados	Número de lados − 2	Número de triángulos
Pentágono	5	5 − 2 = 3	3
Hexágono	6	6 − 2 = 4	4
Heptágono	7	7 − 2 = 5	5

Suma de los ángulos de un polígono convexo.

En el pentágono, en el hexágono y en el heptágono se han trazado todas las diagonales que parten de un vértice.

Observa que en cada polígono el número de triángulos que se forman se obtiene restando 2 al número de lados.

Así ocurre que:

- En el **pentágono** se forman 5 − 2 = **3 triángulos.**
- En el **hexágono** se forman 6 − 2 = **4 triángulos.**
- En el **heptágono** se forman 7 − 2 = **5 triángulos.**

En general, en un polígono convexo de **n** lados, el número de triángulos que se forman al trazar las diagonales que parten de un vértice es **n** − 2 triángulos.

Ahora bien, como cada triángulo tiene dos rectos, o 180°, resulta que la suma de los ángulos de un polígono convexo es 180 · (**n** − 2).

La suma de los ángulos de un polígono convexo es igual a tantas veces 180° como lados tiene el polígono menos dos.

1. Contesta:

a) ¿Cuántos triángulos resultan al trazar una diagonal en un cuadrilátero?

b) ¿Cuántos grados suman los ángulos de un cuadrilátero?

c) ¿Cuántos grados suman los ángulos de un pentágono?

2. Cálculo de un ángulo de un polígono regular.

EJEMPLO RESUELTO

¿Cuánto mide cada ángulo de un hexágono regular?

Al trazar las diagonales que parten de un vértice se forman 4 triángulos. Como cada uno tiene 180° resulta:

Suma de los ángulos del hexágono = 180 · (6 − 2) = 180 · 4 = 720°.

Como en el hexágono regular los 6 ángulos son iguales, habrá que dividir 720 entre 6:

720 : 6 = **120° mide cada ángulo del hexágono regular.**

Calcula lo que mide cada ángulo de:

a) Un eneágono regular.

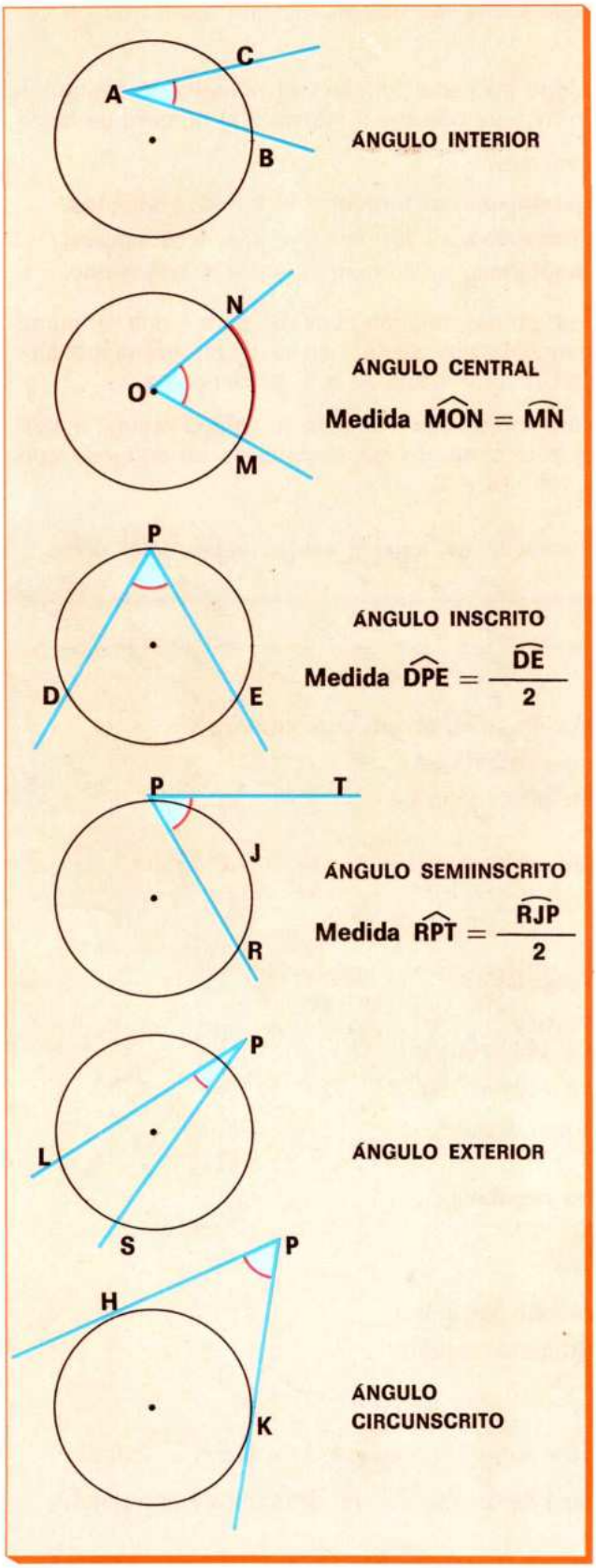
b) Un octógono regular.

c) Un decágono regular.

d) Un pentágono regular.

3. Lee atentamente y calcula:

El número de diagonales de cada vértice de un polígono convexo de **n** lados se calcula con la fórmula $\frac{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} - 3)}{2}$. Calcula el número de diagonales del hexágono, heptágono, octógono y decágono.



Posiciones relativas de un ángulo respecto de una circunferencia.

Un ángulo y una circunferencia pueden ocupar las siguientes posiciones relativas: **ángulo interior, ángulo central, ángulo inscrito, ángulo semiinscrito, ángulo exterior** y **ángulo circunscrito.**

- **Ángulo interior** es el ángulo que tiene su vértice en un punto interior a la circunferencia.

  El ángulo $\widehat{BAC}$ es un ángulo interior.

- **Ángulo central** es el ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia. El ángulo $\widehat{MON}$ es un ángulo central y $\overset{\frown}{MN}$ es su arco correspondiente.

  El ángulo central es un caso particular del ángulo interior.

  La medida del ángulo central es igual a la medida de su arco correspondiente.

- **Ángulo inscrito** es el ángulo que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son dos secantes.

  El ángulo $\widehat{DPE}$ es un ángulo inscrito.

  Se puede probar que la medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad del arco que abarcan sus lados.

- **Ángulo semiinscrito** es el ángulo que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son uno secante y el otro tangente a la circunferencia.

  El ángulo $\widehat{RPT}$ es un ángulo semiinscrito.

  La medida del ángulo semiinscrito es también igual a la mitad del arco que abarcan sus lados.

- **Ángulo exterior** es el ángulo que tiene su vértice en un punto exterior a la circunferencia y sus lados son secantes.

  El ángulo $\widehat{LPS}$ es un ángulo exterior.

- **Ángulo circunscrito** es el ángulo que tiene su vértice en un punto exterior a la circunferencia y sus lados son tangentes.

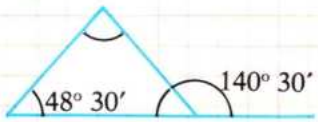
  El ángulo $\widehat{HPK}$ es un ángulo circunscrito.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

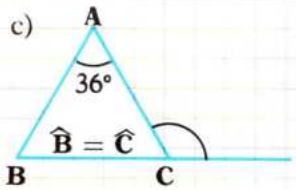
1. Averigua en cada caso lo que mide el ángulo coloreado de azul.

a)

b)



c)

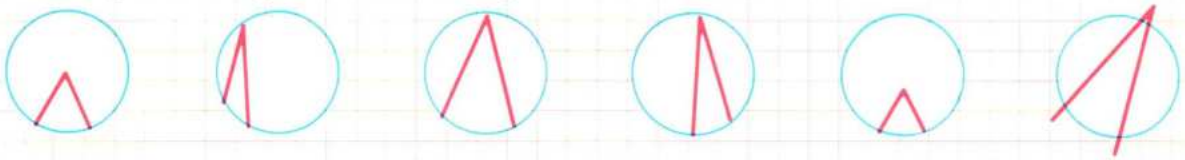


2. Calcula el número de diagonales y el valor de cada ángulo de:

a) Un eneágono regular.

b) Un polígono regular de 20 lados.

3. De los siguientes ángulos, señala los que son inscritos:



4. Dibuja:

a) Dos ángulos inscritos en una circunferencia.

b) Dos ángulos semiinscritos.

c) Dos ángulos interiores.

5. El ojo humano abarca horizontalmente un ángulo de 120°. Imagina una persona situada en el vértice de un pentágono regular.

¿Cuántos de entre los demás vértices sería capaz de ver simultáneamente? ¿Y si se sitúa en el vértice de un hexágono regular?

Recuerda que la medida del ángulo inscrito es la mitad del arco que abarca sus lados, o también que la medida del arco es doble de la medida del ángulo inscrito.

6. El suelo de una habitación se recubre con losetas que tienen forma de cuadrado.

¿Qué número de losetas concurren en el vértice de una de ellas? ¿Y si las losetas tuviesen forma de hexágono regular? ¿Y de triángulo equilátero?

¿Podría recubrirse una habitación con losetas iguales que tuviesen forma de pentágono regular? ¿Y de heptágono regular?

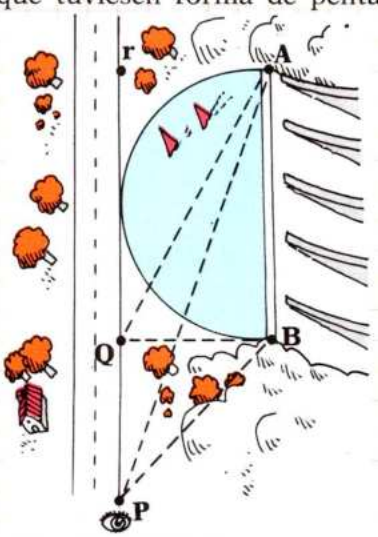
Razona las respuestas.

7. Una persona camina por el camino recto **r**.

Cuando está en el punto **P** ve el borde recto $\overset{\frown}{AB}$ de una presa semicircular con un ángulo $\overset{\frown}{APB}$.

Cuando está en el punto **Q**, el caminante ve el borde **AB** bajo un ángulo $\overset{\frown}{AQB}$.

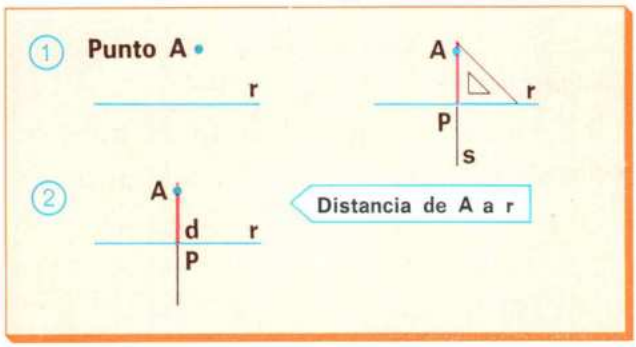
¿En qué punto de la recta **r** se verá el borde **AB** bajo un ángulo recto?



TEMA 19 RECTAS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO

1. Mediatriz de un segmento: propiedad

Distancia de un punto a una recta.

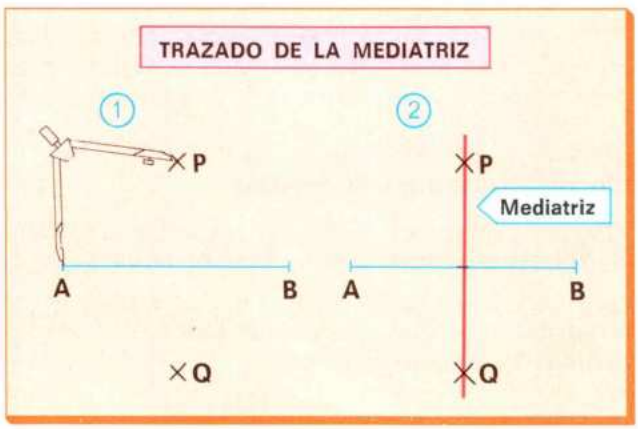


Observa el punto **A** y la recta **r**.

1. Por el punto **A** se ha trazado la recta **s**, perpendicular a la recta **r**.
2. El punto **P** es el pie de la perpendicular y el segmento **AP** es la distancia (**d**) del punto **A** a la recta **r**.

Se llama distancia de un punto a una recta al segmento de perpendicular que une el punto con la recta.

Mediatriz de un segmento.

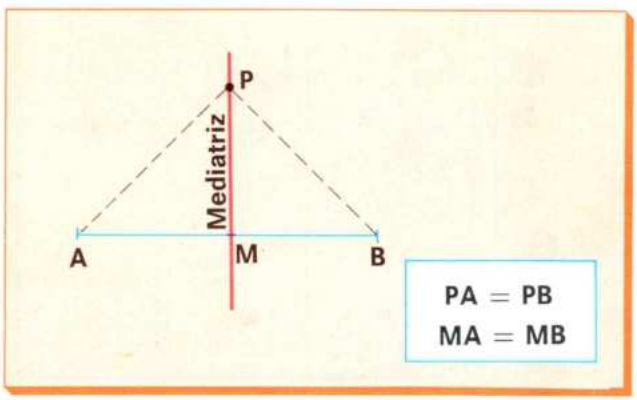


La mediatriz de un segmento AB es la perpendicular trazada en el punto medio del segmento.

Observa cómo se traza la mediatriz del segmento **AB**.

1. Se trazan dos arcos con centros en los extremos **A** y **B** y radios convenientes para que estos arcos se corten en dos puntos **P** y **Q**.
2. Se traza la recta que une los puntos **P** y **Q** y así queda trazada la mediatriz.

Propiedad de la mediatriz.



Si se une un punto **P** de la mediatriz con los extremos del segmento se obtienen dos segmentos **PA** y **PB**, que son iguales.

En efecto, los triángulos rectángulos **AMP** y **PMB** son iguales porque tienen iguales los dos catetos.

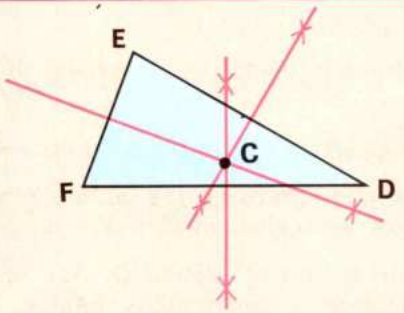
También se puede comprobar que **PA = PB** doblando la figura por la mediatriz. En este plegado **A** coincide con **B**, es decir, la mediatriz es el eje de simetría del segmento.

La mediatriz de un segmento es el eje de simetría de dicho segmento.
Todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del mismo.

2. Mediatrices de un triángulo

Las mediatrices de un triángulo y el circuncentro.

C: CIRCUNCENTRO DEL TRIÁNGULO EFD



Como los lados de un triángulo son segmentos, se puede trazar la mediatriz de cada uno de los lados.

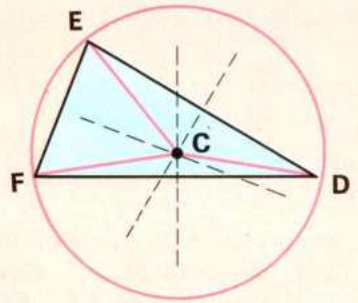
Estas tres mediatrices son las mediatrices del triángulo.

En el triángulo **EFD** se han trazado las mediatrices de sus lados.

Observa que las tres mediatrices se cortan en un mismo punto **C**. Este punto **C** se llama **circuncentro del triángulo.**

Propiedad del circuncentro.

CIRCUNFERENCIA CIRCUNSCRITA AL TRIÁNGULO EFD



Es fácil probar que el circuncentro está a igual distancia de los vértices del triángulo, es decir, que **CF** = **CD** = **CE**.

En efecto; basta tener en cuenta que todo punto de la mediatriz equidista de sus extremos:

- **CF** = **CD**, porque **C** está en la mediatriz del segmento **FD.**
- **CD** = **CE**, porque **C** está en la mediatriz del segmento **ED.**

Por tanto, **CF** = **CD** = **CE**.

Por ser iguales los segmentos **CF**, **CD** y **CE** se puede construir una circunferencia con centro en el circuncentro **C** y que pasa por los vértices **F**, **E**, **D**. Esta circunferencia que pasa por los tres vértices se llama **circunferencia circunscrita al triángulo.**

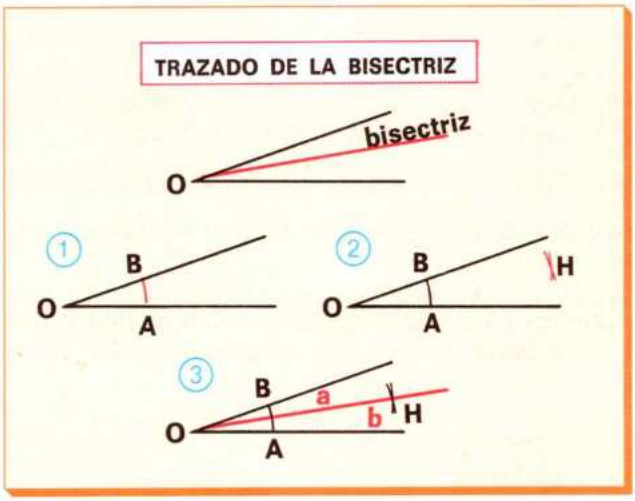
Las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto llamado circuncentro, que es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

1. Dibuja y traza:

- Dibuja un triángulo de lado 6 cm, 8 cm y 10 cm. Para hallar el circuncentro basta con que dibujes las mediatrices de dos lados. Traza después la circunferencia circunscrita al triángulo.
- Dibuja tres puntos no alineados. Únelos y así obtienes un triángulo. Traza después la circunferencia que pasa por los tres puntos dados (circunferencia circunscrita al triángulo).

3. Bisectriz de un ángulo. Propiedad

Bisectriz de un ángulo.

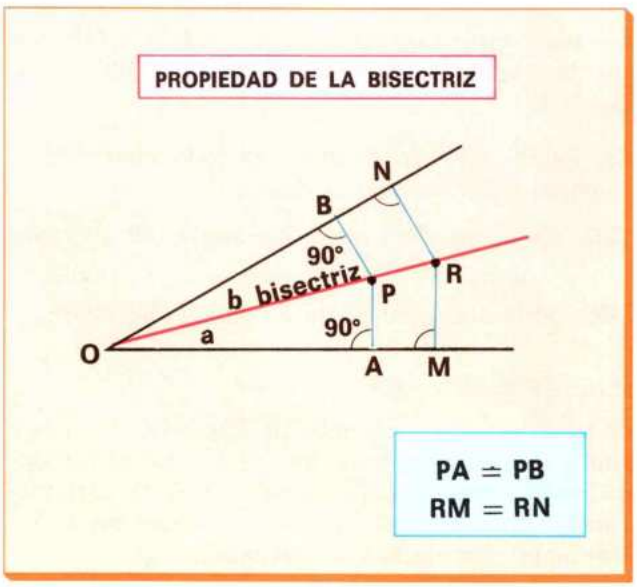


La bisectriz del ángulo de vértice **O** es la semirrecta de origen en el vértice **O** y que divide el ángulo en dos ángulos iguales.

Observa cómo se traza la bisectriz del ángulo de vértice **O**.

1. Con centro en el vértice **O** se traza un arco $\overset{\frown}{AB}$.
2. Sucesivamente, con centro en los puntos **A** y **B** se trazan arcos que se cortan en el punto **H**.
3. Se une el punto **H** con el vértice **O**. Así queda el ángulo dado dividido en dos ángulos iguales: $\hat{a} = \hat{b}$. La recta **OH** es la bisectriz.

Propiedad de la bisectriz.



Vamos a probar que si un punto **P** está en la bisectriz de un ángulo dicho punto dista igual de los lados del ángulo.

Observa el ángulo de vértice **O**. Desde el punto **P** de la bisectriz se han trazado las perpendiculares de los lados.

Los triángulos rectángulos **OAP** y **OBP** son iguales porque tienen iguales:

- Un ángulo agudo: $\hat{a} = \hat{b}$.
- Un ángulo recto: $\hat{A} = \hat{B} = 90°$.
- Un lado común para los dos triángulos: **OP**, y por consiguiente **PA** = **PB**.

También se puede comprobar esta igualdad doblando la figura por la bisectriz. Procediendo así coinciden los dos lados del ángulo y los segmentos **PA** y **PB**. Esto significa que la bisectriz de un ángulo es el eje de simetría de dicho ángulo.

La bisectriz de un ángulo es la semirrecta con origen en el vértice del ángulo que lo divide en dos ángulos iguales.
Todo punto de la bisectriz equidista de los lados del ángulo.

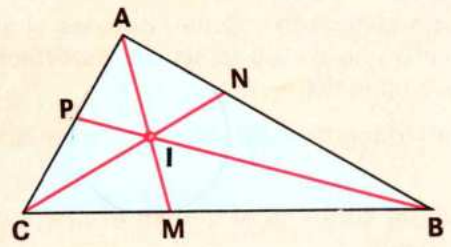
1. Recorta y pliega:

- Traza un ángulo y recorta el papel por el borde de los lados.
- Dobla el papel de modo que los lados coincidan.
- Desdobla el papel y marca el doblez, que será la bisectriz.
- Señala un punto **P** en la bisectriz y traza desde **P** las perpendiculares a los lados.
- Dobla de nuevo por la bisectriz y comprueba que **P** dista igual de los lados del ángulo.

4. Bisectrices de un triángulo

Las bisectrices de un triángulo y el incentro.

I: INCENTRO DEL TRIÁNGULO ABC



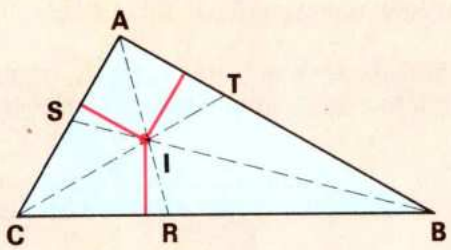
Las bisectrices de un triángulo son las bisectrices de sus ángulos.

En el triángulo **ABC** se han trazado las tres bisectrices:

- **AM** es la bisectriz del ángulo $\hat{A}$.
- **BP** es la bisectriz del ángulo $\hat{B}$.
- **CN** es la bisectriz del ángulo $\hat{C}$.

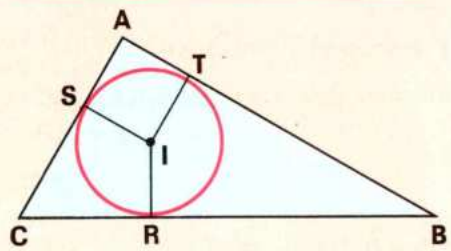
Observa que las tres bisectrices del triángulo **ABC** se cortan en un mismo punto **I** que se llama **incentro del triángulo.**

Propiedad del incentro.



IR = IT = IS

CIRCUNFERENCIA INSCRITA EN EL TRIÁNGULO ABC



Es fácil probar que el incentro **I** del triángulo **ABC** dista igual de los tres lados del triángulo.

Tracemos desde el punto **I** las perpendiculares a los lados. Estas perpendiculares cortan a los lados en los puntos **R**, **T**, **S**.

La propiedad del incentro de equidistar de los lados se puede expresar así:

$$IR = IT = IS$$

Para ver que estas distancias son iguales hay que recordar que todo punto de la bisectriz equidista de los lados del ángulo:

- **IR = IT** por ser **I** un punto de la bisectriz del ángulo $\hat{B}$.
- **IT = IS** por ser **I** un punto de la bisectriz del ángulo $\hat{A}$.

Luego:

$$IR = IT = IS$$

Al ser iguales estas distancias se puede construir una circunferencia con centro en **I** que pase por los puntos **R**, **T** y **S**. Esta circunferencia se llama **circunferencia inscrita en el triángulo.**

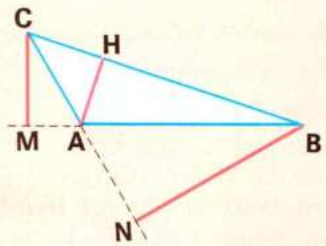
Las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un mismo punto llamado incentro.
La circunferencia que tiene por centro el incentro y es tangente a los lados se llama circunferencia inscrita en el triángulo.

1. Dibuja y traza:

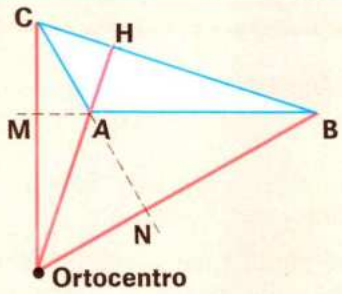
- Dibuja un triángulo de lados 6 cm, 8 cm y 10 cm. Para averiguar el incentro basta con que traces dos bisectrices.
- Traza la circunferencia inscrita.

5. Alturas de un triángulo

ALTURAS DE UN TRIÁNGULO COMO SEGMENTOS



ALTURAS DE TRIÁNGULOS COMO RECTAS



Las alturas de un triángulo y el ortocentro.

La expresión «alturas de un triángulo» tiene dos significados en Matemáticas:

PRIMER SIGNIFICADO

Las alturas como segmentos. Cada altura es el segmento perpendicular a uno de los lados o a su prolongación desde el vértice opuesto.

Las alturas del triángulo **ABC** son los segmentos **AH**, **CM** y **BN**.

Este significado de altura es el que se usa para calcular el área del triángulo.

SEGUNDO SIGNIFICADO

Las alturas como rectas. Cada altura es la recta perpendicular a uno de los lados o a su prolongación desde el vértice opuesto.

Con este significado las alturas del triángulo **ABC** son las rectas **CM**, **AH**, **BN**, que se cortan en el punto **O**.

Observa que las tres alturas (rectas) de un triángulo se cortan en un punto. Este punto se llama **ortocentro del triángulo.**

Las tres alturas de un triángulo se cortan en un mismo punto que se llama ortocentro del triángulo.

1. Dibuja un triángulo rectángulo y traza sus alturas.

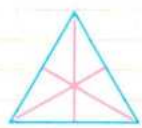
- ¿Cuál es el ortocentro? No olvides que en un triángulo rectángulo los catetos son, a la vez, alturas.

2. Dibuja un triángulo obtusángulo, traza sus tres alturas y marca el ortocentro.

Para trazar las alturas de los lados que forman el ángulo obtuso debes prolongar los lados.

3. Mide las tres alturas de este triángulo equilátero.

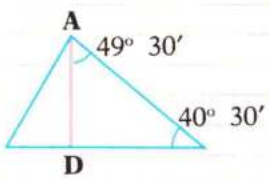
- ¿Qué observas?

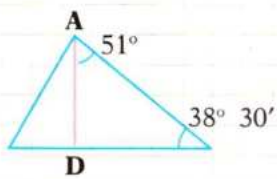


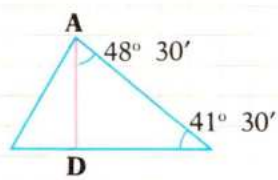
4. Dibuja un triángulo equilátero y traza sus tres alturas.

Después mídelas y escribe una frase que refleje tu observación.

5. De las siguientes figuras, indica en cuáles de ellas AD es altura.



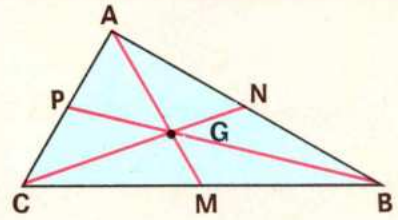




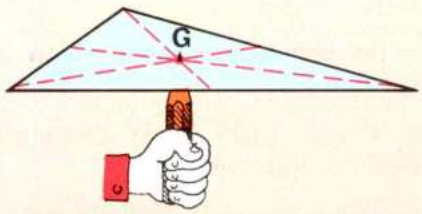
6. Medianas de un triángulo

Las medianas de un triángulo y el baricentro.

G: BARICENTRO DEL TRIÁNGULO ABC



En un triángulo material el baricentro es su centro de gravedad



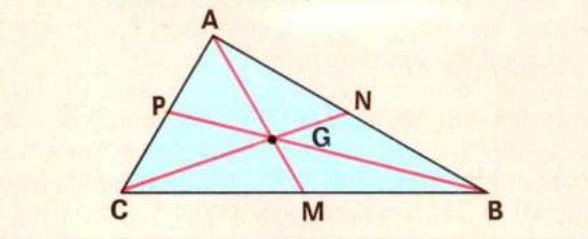
Observa el triángulo **ABC.** Se han trazado los segmentos que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto. Estos segmentos **AM**, **CN** y **BP** se llaman **medianas del triángulo ABC.**

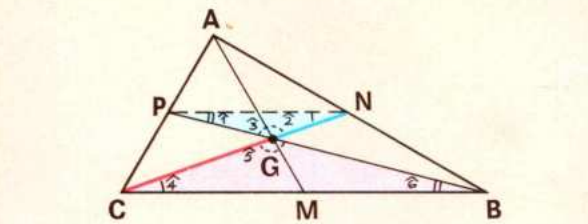
Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto que se llama **baricentro o centro de gravedad del triángulo.**

El centro de gravedad de un cuerpo es, como se sabe por Física, el punto de aplicación de su peso. Esto significa que en un triángulo hecho de un material homogéneo, por ejemplo cartón, el punto de aplicación de su peso es el baricentro, y que, por tanto, se puede mantener en equilibrio con un sostén puntual, por ejemplo con un alfiler, aplicado en el baricentro.

Propiedad del baricentro.

PROPIEDAD DEL BARICENTRO





CG = 2GN
BG = 2GP
AG = 2GM

Ya sabemos que el baricentro divide a cada mediana en dos partes. Ahora vamos a ver que una de estas partes es de doble longitud que la otra.

Sea el triángulo **ABC** y el punto **G** su baricentro.

Unamos los puntos medios **P** y **N**. Así se tienen los triángulos **ABC** y **ANP**, que son triángulos en posición de Thales, y por tanto son semejantes.

Luego:

$$\frac{BC}{PN} = \frac{AC}{AP} = 2$$

Por otra parte, los triángulos **GPN** y **GCB** son semejantes por tener iguales los ángulos $\hat{1} = \hat{6}$; $\hat{2} = \hat{4}$; $\hat{3} = \hat{5}$.

Por eso:

$$\frac{BC}{PN} = 2 \text{ y } \frac{CG}{GN} = 2 \rightarrow CG = 2GN$$

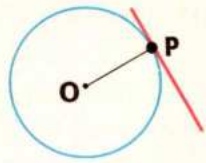
Del mismo modo se prueba que **BG** = 2**GP** y que **AG** = 2**GM.**

Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto llamado baricentro.
El baricentro divide a cada mediana en dos segmentos, uno de doble longitud que el otro.

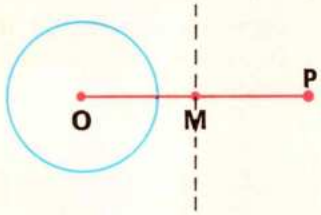
7. Construcción de la tangente de una circunferencia desde un punto

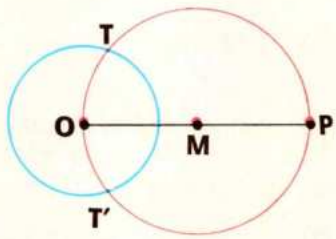
TRAZADO DE TANGENTES A UNA CIRCUNFERENCIA

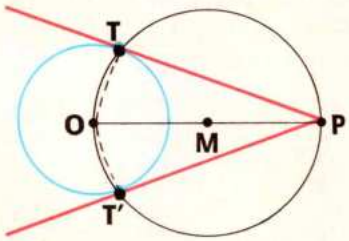
PRIMER CASO



SEGUNDO CASO

① 

② 

③ 

PRIMER CASO

Construcción de la tangente cuando el punto P está en la circunferencia.

Por un punto **P** de la circunferencia sólo se puede trazar una tangente.

Este problema es ya conocido y se reduce a trazar la perpendicular al radio **OP.**

SEGUNDO CASO

Construcción de las tangentes cuando el punto P está fuera de la circunferencia.

Cuando el punto **P** está fuera de la circunferencia se pueden trazar desde él dos tangentes.

Para construir las tangentes a la circunferencia que pasan por el punto **P** se procede así:

① Se une el punto **P** con el centro de la circunferencia y se halla el punto medio **M** del segmento **OP.**

② Se traza la circunferencia de centro **M** que pasa por los puntos **O** y **P.**

③ Los puntos **T** y **T'** son los puntos de contacto de las tangentes; por tanto, basta unir **P** con **T** y **P** con **T'** para obtener las dos tangentes.

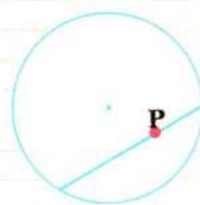
Observa que los ángulos $\widehat{OTP}$ y $\widehat{OT'P}$ son rectos por ser ángulos inscritos que abarcan una semicircunferencia, y en consecuencia las rectas **PT** y **PT'** son perpendiculares a los radios **OT** y **OT'**, respectivamente.

1. Contesta:

a) ¿Se pueden trazar tangentes a una circunferencia desde un punto **P** interior?

b) ¿Cuántas tangentes se pueden trazar a una circunferencia desde un punto **P** de ella?

c) ¿Cuántas tangentes se pueden trazar a una circunferencia desde un punto **P** exterior a la circunferencia?



2. Dibuja una circunferencia y traza las tangentes a ella desde un punto exterior.

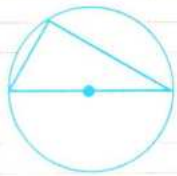
Actividades

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Dibuja un triángulo equilátero y traza las tres alturas. Comprueba que estas alturas son, a la vez, bisectrices, medianas y mediatrices del triángulo.

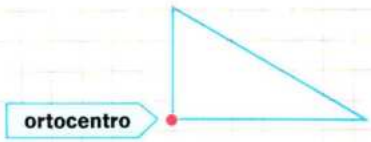
2. Completa en tu cuaderno la frase siguiente: «En un triángulo equilátero el ortocentro coincide con ...».

3. Dibuja un triángulo rectángulo y traza las tres mediatrices.
   - ¿Dónde se encuentran?



4. Razona que en un triángulo rectángulo el circuncentro está siempre en el centro de la hipotenusa.

5. Razona que en un triángulo rectángulo el ortocentro es siempre el vértice del ángulo recto.



6. Dibuja un ángulo y traza una bisectriz mediante plegado.

7. Dibuja un ángulo y traza su bisectriz con regla y compás.

8. Dibuja un segmento y traza su mediatriz mediante plegado. Después dibuja otro segmento y traza su mediatriz utilizando la regla y el compás.

9. Dibuja una circunferencia y traza las tangentes a ella desde un punto exterior.

10. Señala en el papel tres puntos que no estén en línea recta y traza después la circunferencia que pasa por ellos.

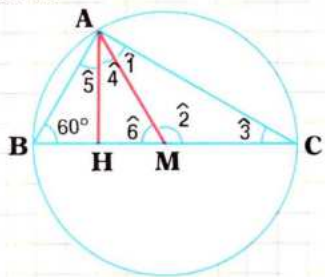
11. Señala en el papel tres puntos alineados. Comprueba que no es posible trazar una circunferencia que pase por ellos.

12. Marca en una circunferencia cinco puntos que forman cinco arcos iguales.
    a) Une cada punto con el segmento y así se forma un pentágono regular. Calcula cuánto vale cada ángulo.
    b) Une los puntos de dos en dos y así obtienes una estrella de cinco puntas. Calcula cuánto mide cada ángulo que se forma en las puntas.

13. En el triángulo rectángulo **ABC** se han trazado la altura **AH** y la mediana **AM**.

    Calcula el valor de los ángulos $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$, $\hat{4}$, $\hat{5}$ y $\hat{6}$.

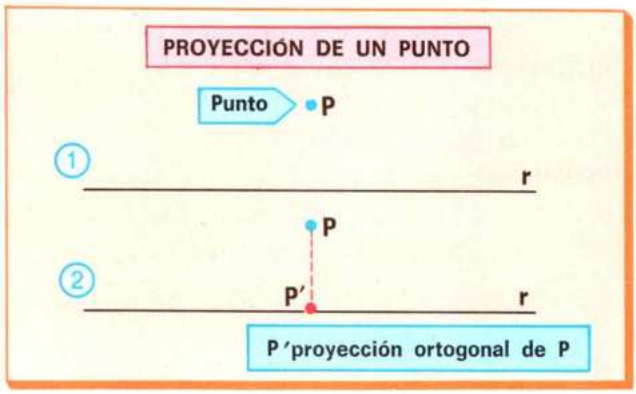
    Ten en cuenta que el triángulo **AMC** es isósceles, porque **MA** = **MC**.



TEMA 20 RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

1. Proyecciones

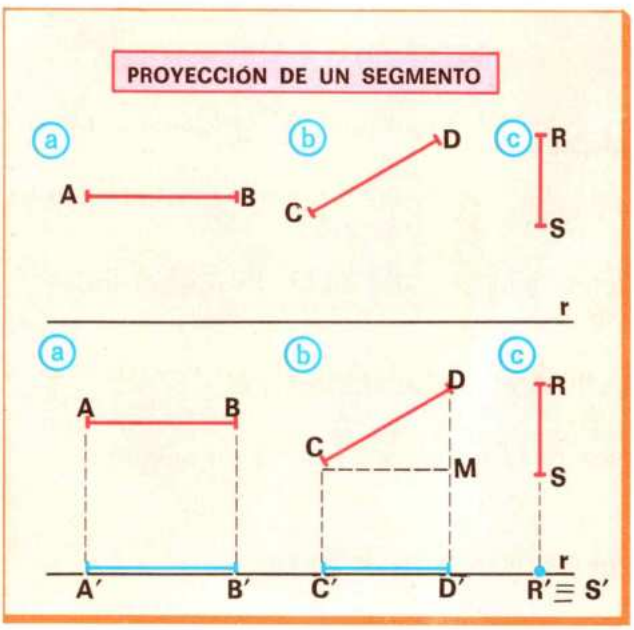
Proyección de un punto sobre una recta.



(1) Observa la recta **r** y el punto **P**.

(2) Si por el punto **P** se traza la perpendicular a la recta **r**, el pie de la perpendicular, el punto **P'**, se llama **proyección ortogonal del punto P sobre la recta r.**

Proyección de un segmento sobre una recta.



Dado un segmento **AB** y una recta **r**, la proyección del segmento **AB** sobre la recta **r** es otro segmento **A'B'** cuyos extremos son las proyecciones de los extremos **A** y **B**.

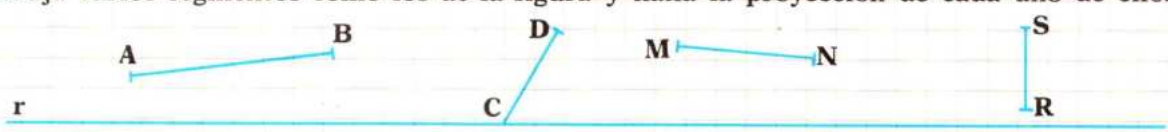
Observa que:

(a) Si el segmento que se proyecta **AB** es paralelo a la recta **r**, entonces su proyección ortogonal sobre **r**, el segmento **A'B'** es igual al segmento proyectado por ser el cuadrilátero **AA'B'B** un rectángulo.

(b) Si el segmento que se proyecta **CD** es oblicuo a la recta **r**, su proyección es, en general, menor que el segmento proyectado pues **CD** es la hipotenusa de un triángulo rectángulo y **C'D'** = **CM** es un cateto de dicho triángulo.

(c) Si el segmento **RS** que se proyecta es perpendicular a la recta **r**, entonces la proyección se reduce a un punto. Observa que las proyecciones **R'** y **S'** de **R** y **S** coinciden.

1. Dibuja varios segmentos como los de la figura y halla la proyección de cada uno de ellos.



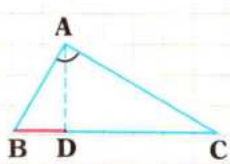
2. Contesta:

a) ¿Puede ser un punto la proyección de un segmento sobre una recta?

b) ¿Es cierto que el segmento proyectado es siempre menor que el segmento que se proyecta?

3. La proyección ortogonal del cateto AB sobre la hipotenusa es el segmento BD.

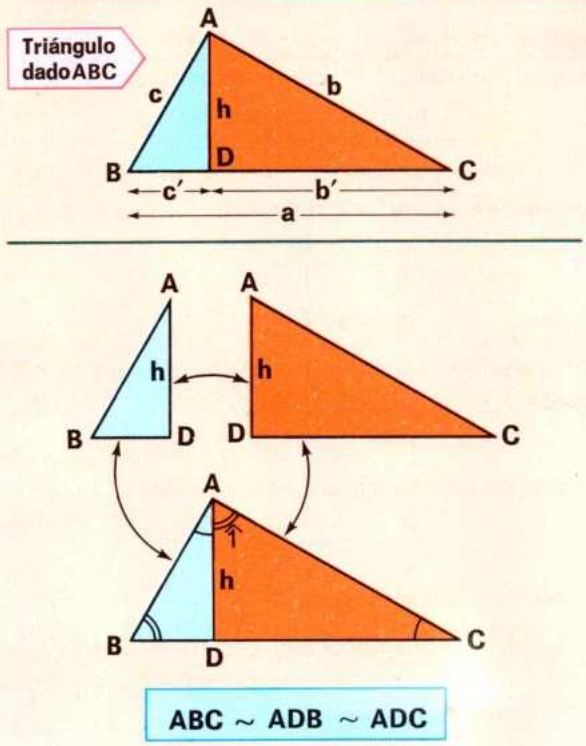
¿Cuál es la proyección del cateto **AC** sobre la hipotenusa?



2. Teorema de la altura

Descomposición de un triángulo rectángulo en triángulos semejantes.

DESCOMPOSICIÓN DEL TRIÁNGULO ABC EN DOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS SEMEJANTES AL ABC



En el triángulo rectángulo **ABC** designamos sus elementos con letras:

a = **BC**, la hipotenusa.
b = **AC** y **c** = **AB**, los catetos.
h = **AD**, la altura relativa a la hipotenusa.
b′, la proyección del cateto **b** sobre la hipotenusa.
c′, la proyección del cateto **c** sobre la hipotenusa.

Al trazar la altura **h**, el triángulo **ABC** queda descompuesto en dos triángulos rectángulos **ADB** y **ADC**.

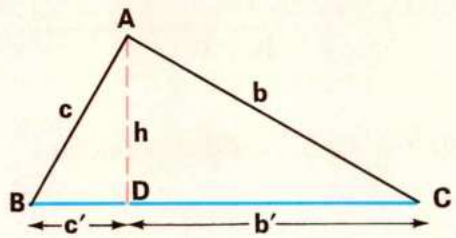
Pues bien, los tres triángulos **ABC**, **ADB** y **ADC** son **triángulos semejantes.**

Como los tres triángulos son rectángulos, tienen un ángulo igual a 90°. Por tanto, para probar que los tres triángulos son semejantes es suficiente con mostrar que tienen un ángulo agudo igual (primer caso de semejanza).

- Los triángulos **ADB** y **ABC** tienen el ángulo $\hat{B}$, que es común para los dos triángulos.
- Los triángulos **ADC** y **ABC** tienen el ángulo $\hat{C}$, que es común para los dos triángulos.
- Los triángulos **ADB** y **ADC** tienen el ángulo $\hat{B} = \hat{1}$, porque sus lados son perpendiculares.

Teorema de la altura.

TEOREMA DE LA ALTURA



$$\frac{b'}{h} = \frac{h}{c'} \Leftrightarrow h^2 = b' \cdot c'$$

Como los dos triángulos **ADB** y **ADC** son semejantes, sus lados homólogos son proporcionales:

$$\frac{DC}{DA} = \frac{DA}{DB} = \frac{AC}{AB}$$

La primera proporción se puede escribir así:

$$\frac{b'}{h} = \frac{h}{c'}$$

o también así:

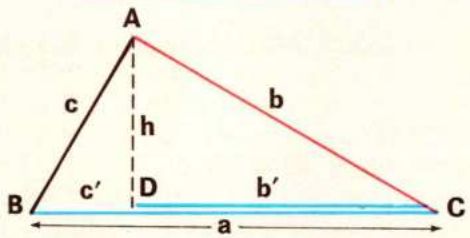
$$h^2 = b' \cdot c'$$

Estas igualdades indican que la altura es media proporcional entre las proyecciones de los dos catetos.

En un triángulo rectángulo, la altura es media proporcional entre los dos segmentos en que divide a la hipotenusa.

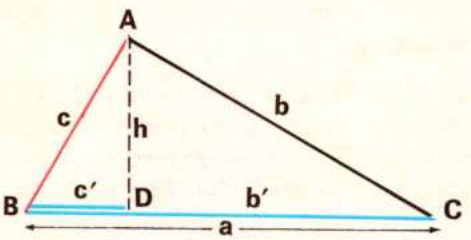
3. Teorema del cateto

TEOREMA DEL CATETO



Cateto b

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{b'} \Leftrightarrow b^2 = a \cdot b'$$



Cateto c

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{c'} \Leftrightarrow c^2 = a \cdot c'$$

Observa de nuevo el triángulo **ABC.** Sabemos que al trazar la altura, se forman dos triángulos que son semejantes entre sí y que también son semejantes al triángulo **ABC**.

De la semejanza de los triángulos **ADC** y **BAC** se tiene la siguiente proporción entre los lados homólogos:

$$\frac{\text{hipotenusa de } \widehat{BAC}}{\text{hipotenusa de } \widehat{ADC}} = \frac{\text{cateto mayor de } \widehat{BAC}}{\text{cateto mayor de } \widehat{ADC}}$$

Es decir: $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{AC}{DC}$

Esta proporción se puede escribir así:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{b'}$$

o también así: $b^2 = a \cdot b'$

Del mismo modo, de la semejanza de los triángulos **ADB** y **CAB** resulta: $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{AB}{DB}$

La primera proporción se puede escribir así:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{c'}$$

o también así: $c^2 = a \cdot c'$

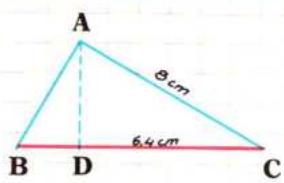
Estas igualdades indican que cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y la proyección de dicho cateto sobre la hipotenusa.

En un triángulo rectángulo, cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.

1. En el triángulo ABC se sabe que AC = 8 cm y que DC = 6,4 cm.

Calcula la medida de la hipotenusa.

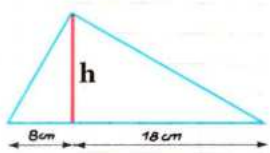
Aplica el teorema del cateto: $\dfrac{BC}{8} = \dfrac{8}{6{,}4}$



2. Contesta:

A. La altura **h** de un triángulo rectángulo divide a la hipotenusa en dos segmentos de longitudes 8 y 18 cm.

¿Cuánto vale dicha altura?



B. En el triángulo rectángulo, la hipotenusa **a** = 5 cm y el cateto **c** = 3 cm.

¿Cuánto vale la proyección **c'** de este cateto sobre la hipotenusa?

(Aplica el teorema del cateto.)

4. Teorema de Pitágoras

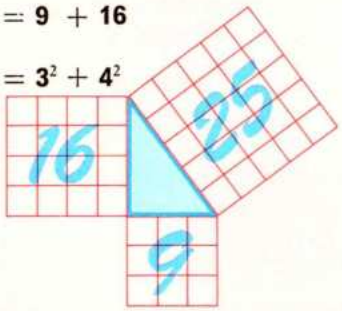
TEOREMA DE PITÁGORAS

Ⓐ **Comprobación empírica**

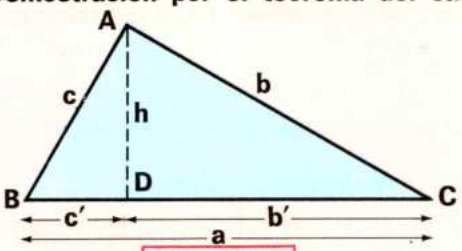
$5^2 = 25; \quad 3^2 = 9; \quad 4^2 = 16$

$25 = 9 + 16$

$5^2 = 3^2 + 4^2$



Ⓑ **Demostración por el teorema del cateto**



FÓRMULAS

$a^2 = b^2 + c^2$

$b^2 = a^2 - c^2$ → $b = \sqrt{a^2 - c^2}$

$c^2 = a^2 - b^2$ → $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$a = \sqrt{b^2 + c^2}$

Pitágoras fue un gran sabio griego de la isla de Samos que vivió hacia el año 500 antes de Cristo.

Ⓐ Pitágoras observó que en el triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 unidades de longitud ocurre que el cuadrado del lado mayor es igual a la suma de los cuadrados de los otros lados: $5^2 = 3^2 + 4^2$, y que en general el área del cuadrado construido sobre el lado mayor es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los otros dos lados.

Ⓑ El teorema de Pitágoras se puede probar mediante el teorema del cateto.

Observa el triángulo **ABC**.

Por el teorema del cateto se tiene:

$$c^2 = a \cdot c'$$
$$b^2 = a \cdot b'$$

Sumando estas igualdades resulta:

$$c^2 + b^2 = a \cdot c' + ab' = a\ (c' + b') = a \cdot a = a^2$$

Es decir:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Esta igualdad $a^2 = b^2 + c^2$ constituye el teorema de Pitágoras.

La igualdad $a^2 = b^2 + c^2$ se puede escribir también en las siguientes formas:

$a = \sqrt{b^2 + c^2}$ Para calcular la hipotenusa.

$b = \sqrt{a^2 - c^2}$ Para calcular el cateto **b**.

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$ Para calcular el cateto **c**.

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

1. Resuelve los siguientes problemas:

A. En un triángulo rectángulo, los catetos miden **b** = 20 cm y **c** = 15 cm. Calcula la hipotenusa **a**.

B. En un triángulo rectángulo, la hipotenusa **a** = 35 cm y el cateto **b** = 28 cm. Calcula el cateto **c**.

2. Calcula la hipotenusa (a) o los catetos (b ó c) en los siguientes triángulos:

① **a** = 15 cm. **b** = 12 cm. Calcula **c**.

② **b** = 32 cm. **c** = 24 cm. Calcula **a**.

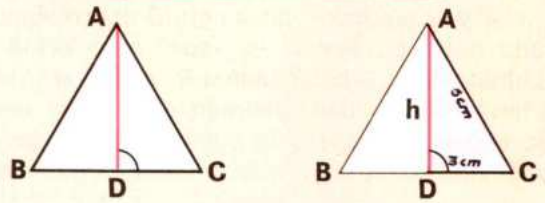
③ **a** = 169 cm. **b** = 65 cm. Calcula **b**.

④ **a** = 289 cm. **b** = 255 cm. Calcula **c**.

5. Aplicaciones del teorema de Pitágoras

Cálculo de la altura de un triángulo equilátero.

CÁLCULO DE LA ALTURA h



$h = \sqrt{AC^2 - DC^2} = \sqrt{36 - 9}$

Queremos calcular la altura del triángulo equilátero de lado **L** = 6 cm.

La altura **AD** es a la vez mediana y mediatriz; por tanto, **D** es el punto medio del lado y **DC** = 3 cm.

Por el teorema de Pitágoras se tiene:

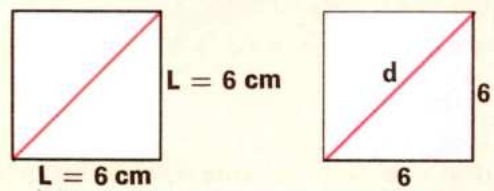
$$AD = h = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27}$$

Haciendo la raíz cuadrada aproximada resulta $\sqrt{27} \simeq 5{,}1$. ($\simeq$: signo de aproximación.)

La altura **h** = 5,1 cm.

Cálculo de la diagonal de un cuadrado.

CÁLCULO DE LA DIAGONAL d



$d = \sqrt{L^2 + L^2} = \sqrt{6^2 + 6^2}$

El lado de un cuadrado es 6 cm. Calcula la diagonal.

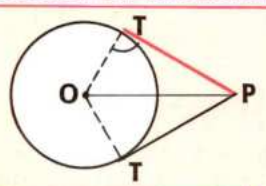
Por el teorema de Pitágoras se tiene:

$$d = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72} = 8{,}4$$

La diagonal vale **d** = 8,4 cm.

Cálculo de la longitud PT de una tangente.

CÁLCULO DE LA TANGENTE PT



$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2}$

La distancia de un punto **P** al centro **O** de una circunferencia es 10 cm, y el radio es 6 cm. Calcula la longitud del segmento **PT** de la tangente.

Aplicando el teorema de Pitágoras se tiene:

$$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$$

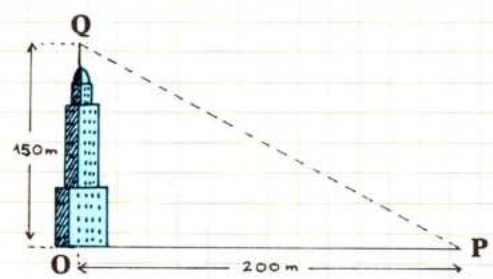
Luego el segmento **PT** de la tangente = 8 cm.

1. Resuelve los siguientes problemas:

A. Una torre de 150 m de altura produce una sombra de 200 m.

¿Qué distancia existe en línea recta desde el punto más alto de la torre hasta el extremo de la sombra?

Hay que calcular la distancia **PQ**.

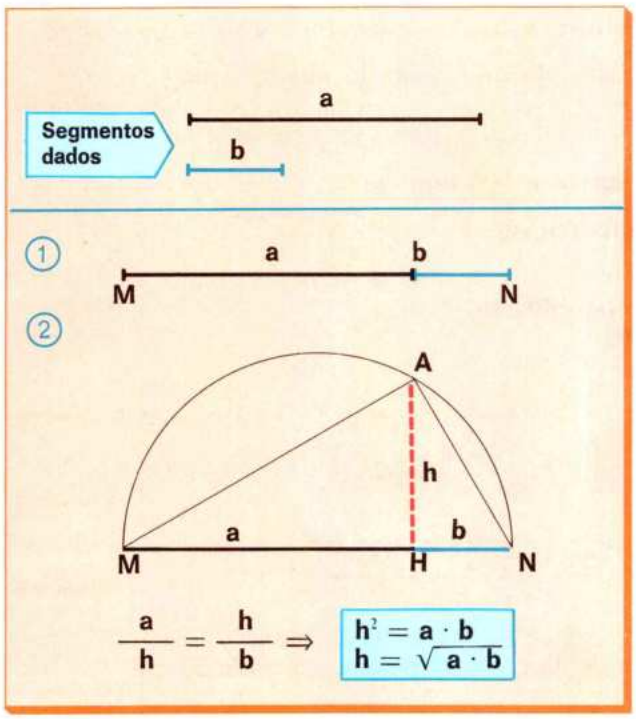


B. Calcula lo que mide la altura de un triángulo equilátero de lado 8 cm.

C. Calcula lo que mide la diagonal de un cuadrado de lado 8 cm.

6. Aplicaciones de los teoremas (de la altura y del cateto)

Construcción de un segmento que sea medio proporcional a dos segmentos dados.



Sean **a** y **b** los dos segmentos dados. Tenemos que hallar el segmento **h** que verifique esta proporción:

$$\frac{a}{h} = \frac{h}{b}$$

Para hallar este segmento **h**, medio proporcional entre **a** y **b**, se procede así:

1. Se construye un segmento **MN** = **a** + **b**.
2. Se traza la semicircunferencia de diámetro **MN** = = **a** + **b** y por el punto **H**, común a los segmentos **a** y **b**, se levanta una perpendicular al segmento **MN** que corte a la semicircunferencia en el punto **A**.

   El segmento **h** = **AH** es el segmento buscado.

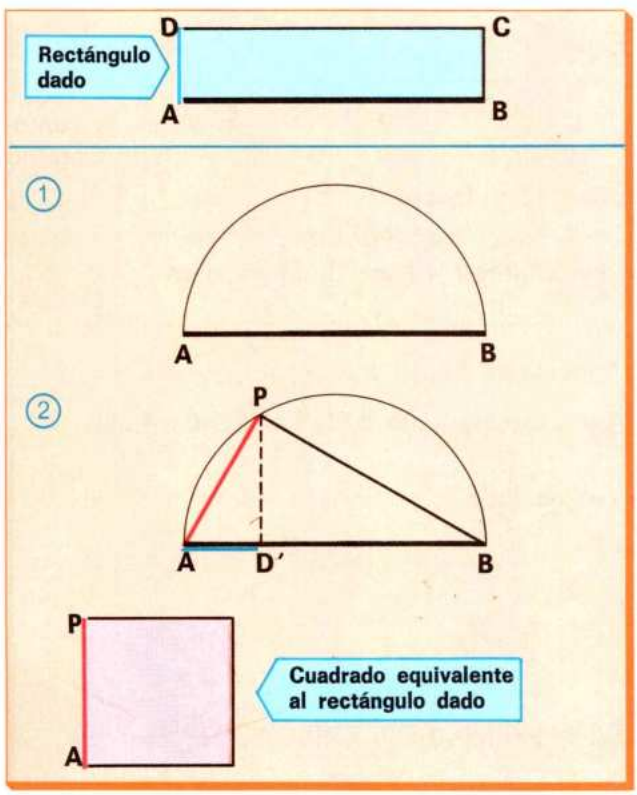
En efecto, el triángulo **MAN** es rectángulo en $\hat{A}$ por ser **A** un ángulo inscrito cuyos lados abarcan 180°.

$$\text{Luego } \hat{A} = \frac{180°}{2} = 90°$$

Aplicando el teorema de la altura al triángulo rectángulo **MAN** se tiene:

$$\frac{a}{h} = \frac{h}{b}, \text{ o sea: } h^2 = a \cdot b$$

Construcción de un cuadrado de igual área que un rectángulo dado.



Para construir un cuadrado de la misma área que el rectángulo **ABCD** se procede de la forma siguiente:

1. Se traza un segmento **AB** igual al lado mayor del rectángulo y se traza una semicircunferencia de diámetro **AB**.
2. Se lleva sobre **AB** un segmento **AD'**, igual al lado menor del rectángulo, **AD'** = **AD**, y por **D'** se traza sobre el diámetro **AB** la perpendicular que corta a la semicircunferencia en el punto **P**. El segmento **AP** es el lado del cuadrado buscado.

   En efecto, el triángulo **APB** es rectángulo, y por el teorema del cateto se tiene:

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{AD'} \rightarrow AP^2 = AB \cdot AD'$$

y como **AD'** = **AD** resulta:

$$AP^2 = AB \cdot AD$$

AP^2: Área del cuadrado de lado AP

$AB \cdot AD$: Área del rectángulo dado ABCD

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Dibuja dos segmentos **a** y **b** y halla otro segmento que sea media proporcional de **a** y **b**.

2. Dibuja un rectángulo de 8 cm de base y 2 cm de altura.

   Calcula numérica y gráficamente el lado de un cuadrado que tenga la misma área que el rectángulo.

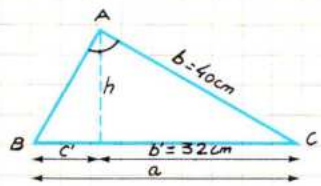
3. En un triángulo **ABC** se sabe que $\hat{A} = 90^\circ$, $\mathbf{b} = 8$ cm y $\mathbf{c} = 6$ cm.

   Calcula las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

4. En el triángulo **ABC**, rectángulo en $\hat{A}$, se conoce $\mathbf{b} = 40$ cm y la proyección de **b** sobre la hipotenusa $\mathbf{b'} = 32$ cm.

   Calcula:

   a) La hipotenusa **a** (teorema del cateto).
   b) El cateto **c**.
   c) La proyección del cateto **c** sobre la hipotenusa.
   d) La altura.



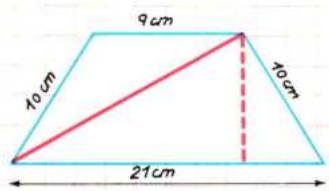
5. En un triángulo isósceles la base (lado desigual) mide 24 cm y el perímetro mide 50 cm.

   Calcula el área del triángulo.

6. En el trapecio isósceles de la figura se conocen: base mayor = 21 cm, base menor = 9 cm y lados no paralelos = 10 cm.

   Calcula:

   a) La altura.
   b) Una diagonal.



7. Calcula el lado de un rombo cuyas diagonales miden 12 y 16 cm.

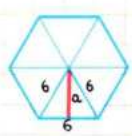
8. Una escalera de 10 m de longitud está apoyada sobre la pared. El pie de la escalera dista 6 m de la pared.

   ¿Qué altura alcanza la escalera sobre la pared?

9. Construye un cuadrado que tenga la misma área que un rectángulo de lados 9 cm y 4 cm.

10. Calcula la apotema de un hexágono regular de 6 cm de lado.

    (Observa que es la altura de un triángulo equilátero.)

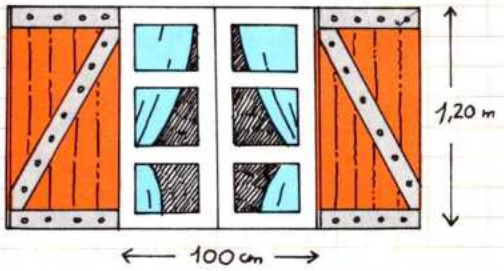


11. La altura relativa a la hipotenusa en un triángulo rectángulo es 4 cm, y un cateto mide 5 cm.

    ¿Cuánto mide la hipotenusa?

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. Determina cuántas contraventanas como las de la figura se pueden reforzar en **Z** con 46 m de listones de madera. Determina el importe de los listones de cada contraventana si el metro de listón es a 1.345 ptas.



2. Se traza una circunferencia, con un compás, cuyos brazos miden 25 cm. Calcula la longitud de la circunferencia si:

a) Los brazos del compás forman un ángulo recto.

b) Los brazos del compás forman un ángulo de 60°.

c) La altura del vértice del compás sobre el papel es de 20 cm.

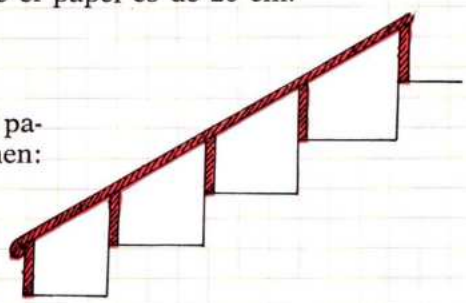
3. Una escalera salva una altura de 2 m.

Determina su número de peldaños, la longitud del pasamanos y el avance horizontal si los peldaños tienen:

a) 20 cm de alto y 30 cm de ancho.

b) 20 cm de alto y 40 cm de ancho.

c) 25 cm de alto y 30 cm de ancho.

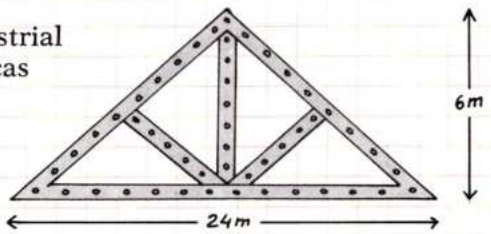


4. Un terreno rectangular de 180 m de largo por 120 m de ancho se divide en dos partes iguales por una de sus diagonales.

Otro terreno de iguales dimensiones se divide en cuatro partes por medio de las dos diagonales. Determina el perímetro y el área de los terrenos resultantes en cada caso.

5. Para sostener la cubierta de una nave industrial se utilizan seis entramados de vigas metálicas como el que se muestra en la figura.

Calcula el importe de las vigas si se venden a razón de 9.450 ptas. el metro.

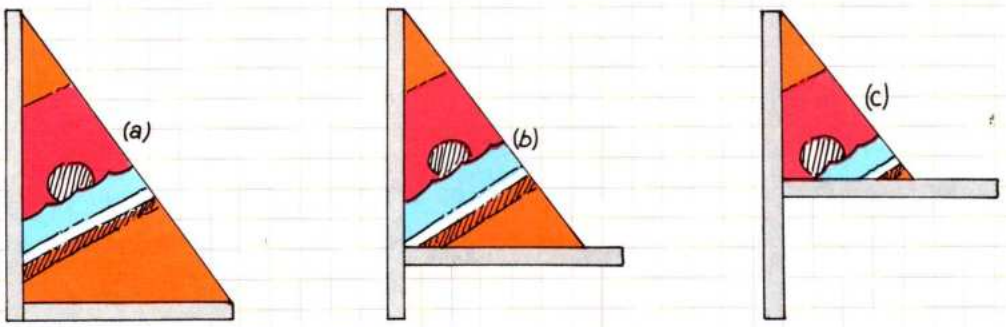


6. La vela triangular de un barco está sostenida por dos palos en ángulo recto que miden 11 m y 5 m, respectivamente. Calcula la superficie de la vela y el perímetro de vela útil cuando:

a) La vela está totalmente extendida.

b) El palo horizontal se desplaza 1 metro sobre el palo vertical.

c) El palo horizontal se desplaza 2 metros sobre el palo vertical.

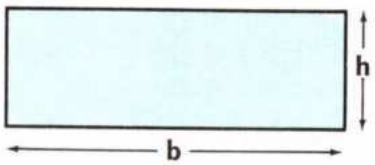


TEMA 21 ÁREA DE LAS FIGURAS PLANAS

1. Área de cuadriláteros y triángulos

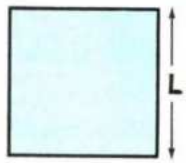
Recuerda las fórmulas de las áreas de los cuadriláteros y los triángulos.

ÁREA DEL RECTÁNGULO



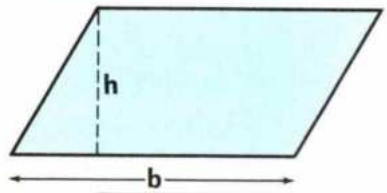
$A = b \times h$

ÁREA DEL CUADRADO



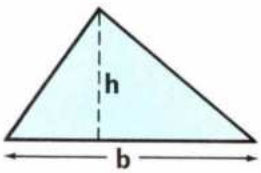
$A = L \times L = L^2$

ÁREA DEL PARALELOGRAMO



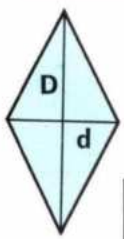
$A = b \times h$

ÁREA DEL TRIÁNGULO



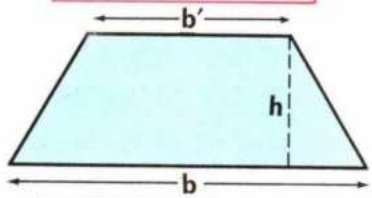
$A = \dfrac{b \times h}{2}$

ÁREA DEL ROMBO



$A = \dfrac{D \times d}{2}$

ÁREA DEL TRAPECIO



$A = \dfrac{b + b'}{2} \times h$

1. Calcula:

a) El área de un rectángulo cuya altura mide 2 cm y su base mide tres veces su altura.

b) El área de un rectángulo de base 6 cm y altura $\frac{2}{3}$ de la base.

c) El lado de un cuadrado de área 16 cm² ($L = \sqrt{A}$).

d) El área en metros cuadrados de un cuadrado que tiene 10 dm de lado.

e) El área de un triángulo cuya base es 10 cm y su altura mide $\frac{4}{5}$ de la base.

f) El área de un triángulo cuya base mide 5 cm y su altura es el doble de la base.

g) El área en centímetros cuadrados de un paralelogramo de base 2 dm y altura 3 cm.

h) El área de un rombo cuya diagonal mayor mide 10 cm y cuya diagonal menor es la mitad de la mayor.

2. Resuelve estos problemas:

A. El producto de las diagonales de un rombo es 24 cm. Calcula su área.

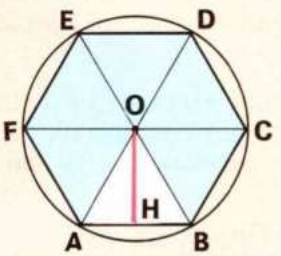
B. La suma de las bases de un trapecio es 10 cm, y su altura es 2 cm. Calcula su área.

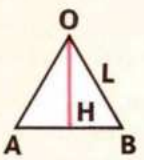
C. Calcula el área del trapecio si su base mayor mide 15 cm, su base menor mide $\frac{2}{3}$ de la base mayor y su altura mide 4 cm.

2. Área de polígonos regulares

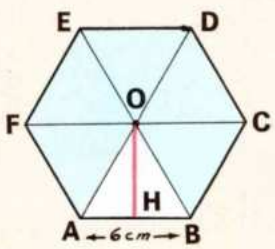
ÁREA DE UN POLÍGONO REGULAR

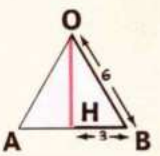
Área del hexágono regular





$$\text{Área polígono regular} = \frac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2}$$





$$\text{Área hexágono} = \frac{36 \times 5{,}18}{2} = 93{,}24 \text{ cm}^2$$

Área del hexágono regular.

Vamos a calcular el área del hexágono regular cuando se conoce el lado **L**.

Observa en la figura que las diagonales que pasan por el centro del polígono lo descomponen en 6 triángulos equiláteros.

Por consiguiente, para hallar el área del hexágono regular basta hallar el área de uno de los triángulos y después multiplicar el resultado por 6.

Área hexágono regular = 6 × área de uno de los triángulos.

Como la altura de cada triángulo es la apotema **a = OH** y la base es **L**, resulta:

$$\text{área del triángulo} = \frac{\mathbf{L} \times \mathbf{a}}{2}$$

$$\text{área del hexágono} = 6 \times \frac{\mathbf{L} \times \mathbf{a}}{2} = \frac{6 \times \mathbf{L} \times \mathbf{a}}{2}$$

Como $6 \times \mathbf{L}$ = perímetro, resulta:

$$\text{área del hexágono regular} = \frac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2}$$

La fórmula para calcular el área de un hexágono regular es válida para cualquier polígono regular.

Ejemplo

Si el lado mide 6 cm, entonces la apotema **a = OH** se calcula por el teorema de Pitágoras:

$$\mathbf{a = OH} = \sqrt{\mathbf{OB}^2 - \mathbf{HB}^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 5{,}18$$

Perímetro = 6 × 6 = 36 cm; apotema = 5,18 cm

$$\text{Área hexágono regular} = \frac{36 \text{ cm} \times 5{,}18 \text{ cm}}{2} = \mathbf{93{,}24 \text{ cm}^2}$$

El área de un polígono regular es igual a la mitad del producto del perímetro por la apotema.

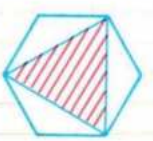
1. **Halla el área de un hexágono regular de lado 10 cm.**

2. **Si el área de un hexágono regular es aproximadamente 96 cm², ¿cuánto valdrá el área de la parte rayada?**

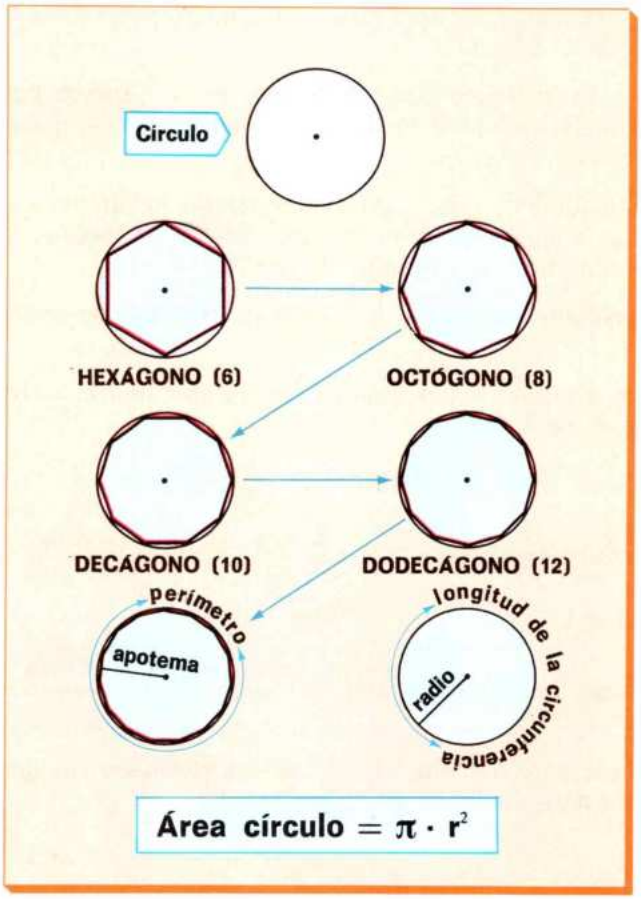
   El hexágono está dividido en 6 triángulos equiláteros iguales.

3. **El perímetro de un hexágono regular es 72 cm. Calcula su área.**

4. **Calcula el área de la parte rayada, sabiendo que el área del hexágono regular es aproximadamente 258 cm².**



Área del círculo: Fórmulas.



Observa este círculo.

Fíjate en que cuanto mayor es el número de lados de los polígonos regulares inscritos en él, más se aproximan sus áreas al área del círculo.

Podemos imaginar que el círculo es como un polígono de muchos lados. En este caso el perímetro del polígono sería la longitud de la circunferencia y la apotema sería el radio. Por tanto:

$$\text{área del círculo} = \frac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2} = \frac{\text{longitud} \times \text{radio}}{2}$$

$$\textbf{Área del círculo} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot r}{2} = \pi \cdot r^2$$

Si se desea hallar el radio conociendo el área (**A**) del círculo se aplica la fórmula:

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

El área de un círculo es igual al producto de π por el radio al cuadrado.

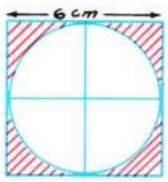
1. **Si el radio de un círculo es 1 dm, calcula su área en metros cuadrados.**

2. **Calcula el área del círculo, sabiendo que su diámetro son 2 m.**

3. **Sabiendo que el área de un círculo es 16 π m², ¿cuánto medirá su radio?**

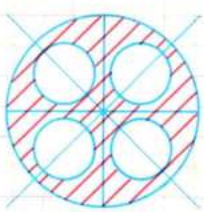
4. **Calcula el área de la parte rayada sabiendo que el lado del cuadrado mide 6 cm.**

   (La relación que hay entre el lado del cuadrado y el radio del círculo inscrito en él es: el radio es la mitad del lado.)



5. **Si la longitud de una circunferencia es 12 π cm, ¿cuál será el área del círculo correspondiente?**

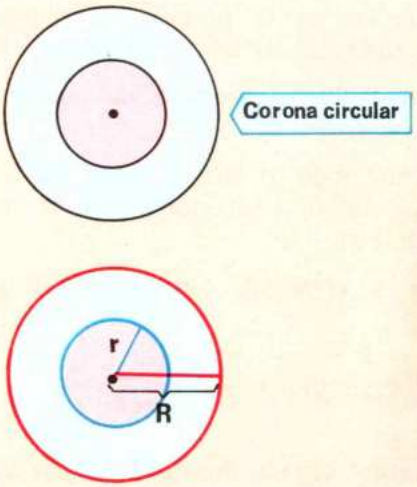
   Recuerda: $r = \frac{L}{2\pi}$



6. **Calcula el área de la parte rayada, si el radio del círculo mayor mide 6 cm y el radio de los círculos pequeños mide 2 cm.**

7. **¿Qué diferencias encuentras entre circunferencia y círculo?**

4. Área de la corona circular



Área corona $= \pi \cdot (R^2 - r^2)$

Corona circular es la porción de plano comprendida entre dos circunferencias concéntricas.

Vamos a calcular el área de una corona circular en la que el radio del círculo mayor sea $R = 4$ cm y el radio del círculo menor sea $r = 2$ cm.

1. Calculamos el área del círculo mayor:

$$A = \pi \times R^2 = \pi \times 4^2 \text{ cm}^2 = \pi \times 16 \text{ cm}^2$$

2. Calculamos el área del círculo menor:

$$A = \pi \times r^2 = \pi \times 2^2 \text{ cm}^2 = \pi \times 4 \text{ cm}^2$$

3. Restamos del área del círculo mayor el área del círculo menor:

$$\text{Área corona circular} = \pi \times R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2) = \pi \times (16 - 4) \text{ cm}^2 = \pi \times 12 \text{ cm}^2$$

Área de la corona circular $= \pi (R^2 - r^2)$

El área de la corona circular es igual al área del círculo mayor menos el área del círculo menor.

1. Calcula:

a) El área de una corona circular cuyos radios son $R = 5$ dm y $r = 3$ dm. ¿Cuál sería su área en metros cuadrados?

b) El área de una corona circular cuyo radio mayor es cuatro veces el menor, sabiendo que el menor mide 2 dm.

c) El área de una corona circular sabiendo que el radio mayor es $R = 6$ m y el radio menor es 2/3 del mayor.

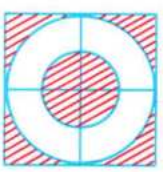
2. Construye una corona circular cuyo radio mayor sea $R = 3$ cm y cuyo radio menor sea $r = 2$ cm.

Calcula su área.

3. En una corona circular, el área del círculo mayor es $25\ \pi$ m^2, y el área del círculo menor es 1/5 del área del mayor.

Calcula el área de la corona circular en decímetros cuadrados.

4. Calcula el área rayada, sabiendo que el lado del cuadrado es 8 cm y el radio del círculo menor mide 2 cm.

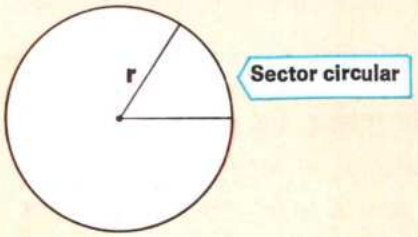


5. En una corona circular el radio del círculo mayor es $R = 12$ cm y el radio del círculo menor es $r = 6$ cm.

Comprueba la relación que hay entre el área de la corona circular y el área del círculo menor.

5. Área del sector circular y área del segmento circular

Área del sector circular.



$$\text{Área sector circular} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot n}{360}$$

Sector circular es la porción de plano comprendida entre dos radios y su arco correspondiente.

Vamos a calcular el área de un sector circular cualquiera.

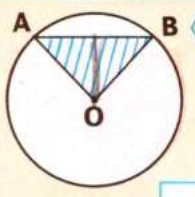
Sabemos que todo el círculo tiene 360°, luego el área que corresponderá a un grado será el área del círculo partido por 360.

En general, si el ángulo central tiene **n** grados, el área será:

$$\text{Área sector circular} = \frac{\pi \times r^2 \times n}{360}$$

El área del sector circular es igual al área del círculo multiplicada por el número de grados y dividida por 360.

Área del segmento circular.



Área segmento circular =
= Área del sector circular AOB −
− Área del triángulo AOB

Segmento circular es la porción de plano comprendida entre una cuerda y su arco correspondiente.

Vamos a calcular el área de un segmento circular.

Si al área del sector circular **OAB** le restamos el área del triángulo **OAB**, tenemos el área del segmento circular.

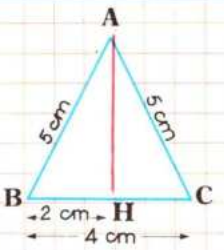
El triángulo **OAB** es isósceles.

Area del segmento circular AB = área del sector circular OAB − área del triángulo OAB.

1. Halla el área de un triángulo isósceles cuya base mide 4 cm y sus lados iguales miden 5 cm.

Como el triángulo **AHB** es rectángulo en **H**, aplica el teorema de Pitágoras para calcular la altura **AH**. Recuerda que **AH** divide el lado **BC** en dos partes iguales:

BH = 2 cm y **HC** = 2 cm



2. Halla el área del sector circular cuyo radio es 3 cm y su ángulo central es 30°.

3. Halla el área del sector circular cuyo radio es 2 cm y su ángulo central es 60°.

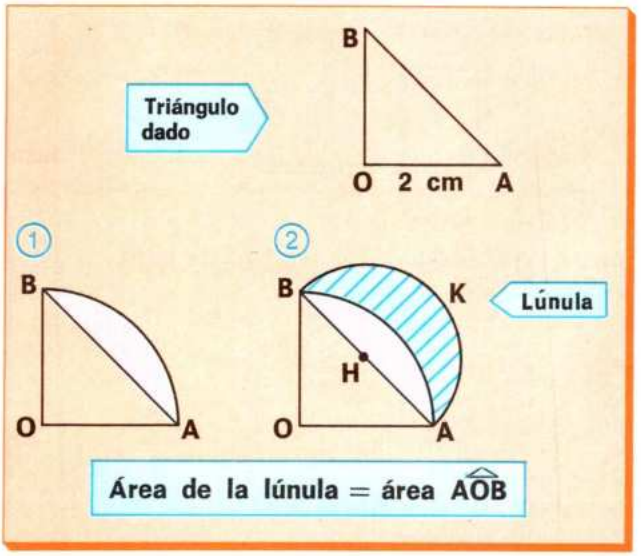
- ¿Cuál sería el área si su ángulo central fuera el doble (120°)?

4. Halla el área del triángulo isósceles cuya base mide 6 cm y los lados iguales miden 8 cm.

5. Halla el área del segmento circular cuyo radio es 4 cm, su ángulo central es 30° y la longitud de la cuerda es 2 cm.

6. Área de otras figuras circulares

Área de la lúnula.



Observa cómo se construye la lúnula a partir de un triángulo rectángulo isósceles de catetos 2 cm.

① Con centro en vértice **O** se traza el arco **AB**.

② Con centro en el punto **H**, que es el punto medio de la hipotenusa, se traza el arco **AKB**.

La parte rayada de azul se llama **lúnula de Hipócrates**.

Vamos a calcular el área de la lúnula suponiendo que cada cateto del triángulo mide 2 cm.

Área lúnula = área semicírculo **AKB** − área segmento circular rojo.

Como área segmento circular rojo = área sector **AOB** − área triángulo **AOB**, resulta:

área lúnula = área semicírculo **AKB** − [área sector **AOB** − área triángulo **AOB**]

área lúnula = área semicírculo AKB − área sector AOB + área triángulo AOB

- **Área del semicírculo AKB.** Calculemos en primer lugar el radio **HA** del semicírculo.

Por el teorema de Pitágoras $AB = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$. Por tanto $HA = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2}$.

Área del semicírculo **AKB** $= \frac{1}{2}\ \pi\ HA^2 = \frac{1}{2}\ \pi\ \left(\frac{\sqrt{8}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\ \pi \cdot \frac{8}{4} = \pi\ cm^2$

- **Área del sector circular AOB** $= \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 90}{360} = \frac{360 \cdot \pi}{360} = \pi\ cm^2$

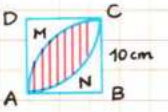
- **Área del triángulo AOB** $= \frac{2 \times 2}{2} = 2\ cm^2$

Luego: área lúnula $= \pi\ cm^2 - \pi\ cm^2 + 2\ cm^2 = 2\ cm^2$

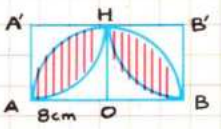
Área de la lúnula = área del triángulo AOB

1. Halla el área de la lúnula construida sobre un triángulo rectángulo isósceles de 6 cm de cateto.

2. Calcula el área de la parte rayada, siendo AB = 10 cm, ABCD un cuadrado y $\widehat{AMC}$ y $\widehat{ANC}$ arcos de circunferencia de centros B y D, respectivamente.

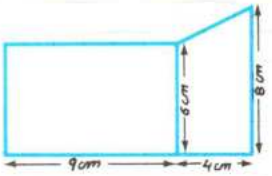


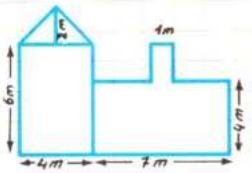
3. Calcula el área de la parte rayada, siendo AB = 8 cm, $\widehat{AHB}$ un arco de circunferencia de centro O y $\widehat{AH}$ y $\widehat{HB}$ arcos de circunferencia de centros A′ y B′, respectivamente.



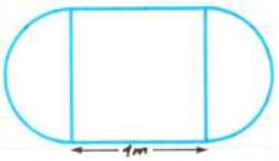
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula las áreas de las siguientes figuras:

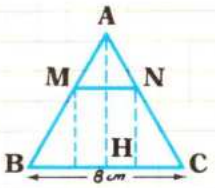




2. La superficie de una mesa está formada por una parte central cuadrada de 1 m de lado y dos semicírculos adosados en dos lados opuestos. Calcula el área.



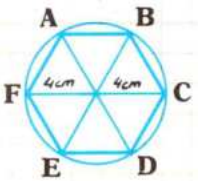
3. Un triángulo **ABC** tiene por base **BC** = 8 cm y por altura **AH** = 6 cm. Se traza una paralela a la base **MN.** Si el área del triángulo **AMN** es 15 cm², ¿cuál es el área del trapecio **MBCN**?



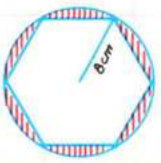
4. El radio de un círculo mide 6 cm.
¿Cuánto valdrá el lado del cuadrado inscrito en el círculo?

5. Calcula el área de la parte rayada sabiendo que el radio del círculo es 4 cm.

6. Sea el hexágono **ABCDEF** inscrito en el círculo de radio 4 cm. Calcula el área del hexágono.



7. Sea el hexágono regular **ABCDEF** inscrito en el círculo de radio 8 cm. Calcula el área de la figura rayada.



8. Calcula el área de un sector circular cuyo ángulo central mide 120° y el radio del círculo mide 3 dm.

9. Un mirador tiene tres ventanas rectangulares de 70 cm de ancho por 150 cm de largo y dos de 50 cm de ancho por 85 cm de largo.
¿Cuántos metros cuadrados de cristal tiene?

10. Un árbol tiene 4 m de diámetro.
¿Cuántos hombres hacen falta para rodearlo si cada hombre abarca 1,57 m?

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

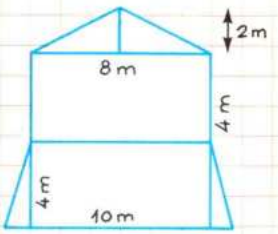
1. Juan tiene un jardín de forma rectangular de 500 m de largo y 300 m de ancho, y quiere hacer una piscina de forma circular de 100 m de radio.

   ¿Cuánto terreno queda para plantar árboles? ¿El terreno disponible para los árboles depende de donde se vaya a construir la piscina?

2. Se quiere embaldosar una habitación con baldosas cuadradas de 25 cm de lado.

   ¿Cuántas baldosas se necesitarán si la habitación tiene 2.500 cm de largo y 400 cm de ancho?

3. Calcula la cantidad de pintura que es necesaria para pintar la fachada de este edificio sabiendo que se gastan 0,5 kg de pintura por metro cuadrado.



4. Juan quiere cubrir una pared de su habitación con pósters. Si la dimensión de cada póster es de 75 cm de largo y 50 cm de ancho ¿cuántos pósters necesitará si la pared tiene 375 cm de largo y 250 de ancho?

5. En un parque infantil de forma circular de 700 m de radio hay situada en el centro una fuente también de forma circular de 5 m de radio.

   ¿De qué área disponen los niños para jugar?

6. Ana tiene un reloj de forma circular de radio 1 cm. Mira el reloj y comprueba que son las 2 h.

   ¿Qué área definen las dos agujas sabiendo que forman un ángulo de 60°?
   ¿Y si el reloj marcara las 3 h?

7. En una plaza de forma circular de radio 250 m se van a poner seis farolas cuya base es un círculo de 1 m de radio; el resto de la plaza lo van a utilizar para sembrar césped.

   ¿Qué área se utilizará para el césped?

8. Se quiere cubrir con una capa de arena una plaza circular de 10 m de radio. Calcula los kilogramos de arena que se necesitarán si para cubrir 1 m^2 necesitamos 5 kg.

9. Un campo rectangular de 200 m de largo y 90 m de ancho debe ser repartido entre dos herederos. Al mayor le corresponden los 2/3 del campo.

   ¿Cuánto le corresponderá al pequeño?

10. Un campo tiene forma de trapecio, cuyas bases miden 128 m y 92 m. La anchura del campo mide 40 m. Se construye en este campo un paseo de 4 m de ancho perpendicular a las dos bases. Calcula qué porción de campo queda disponible para el cultivo.

11. Una pieza de tela de forma rectangular mide 4 m de largo y 2 m de ancho.

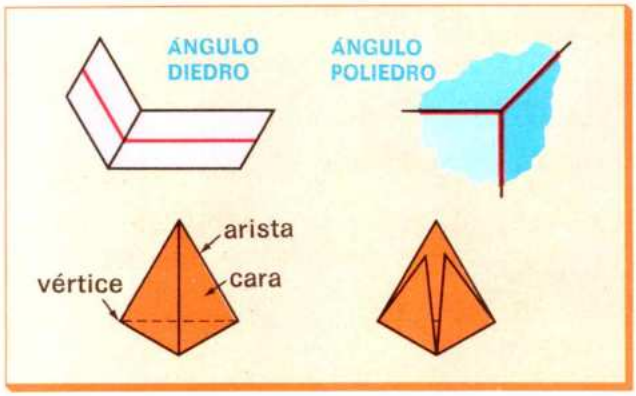
    ¿Cuánto costará la pieza si el metro cuadrado vale 500 ptas.?

12. Un coronel ha colocado a su regimiento en forma de cuadrado. Sabiendo que ha puesto 20 soldados por cada lado ¿cuántos soldados forman el regimiento?

TEMA 22 ÁREAS DE LOS POLIEDROS Y DE LOS CUERPOS REDONDOS

1. Poliedros regulares

Definición.

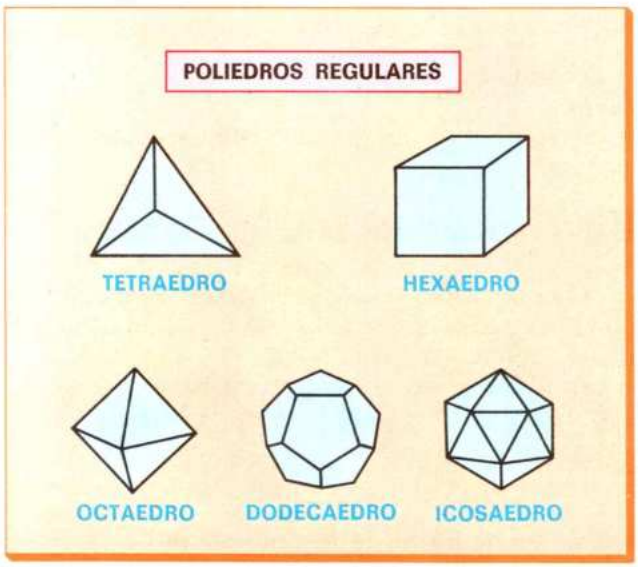


Ángulo diedro es la porción de espacio limitada por dos semiplanos que se llaman caras.

Ángulo poliedro es la porción de espacio limitada por tres o más planos que concurren en un punto llamado vértice.

Poliedro es una región de espacio limitada por polígonos.

Los cinco poliedros regulares.

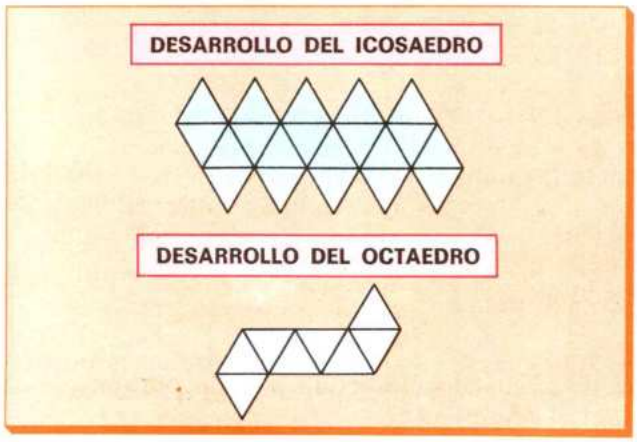


Poliedro regular es el que tiene todos sus ángulos diedros y todos sus ángulos poliedros iguales y sus caras son polígonos regulares iguales.

Hay sólo cinco poliedros regulares:

- El **tetraedro**, que tiene 4 caras que son triángulos equiláteros.
- El **hexaedro** o **cubo**, que tiene 6 caras que son cuadrados.
- El **octaedro**, que tiene 8 caras que son triángulos equiláteros.
- El **dodecaedro**, que tiene 12 caras que son pentágonos regulares.
- El **icosaedro**, que tiene 20 caras que son triángulos equiláteros.

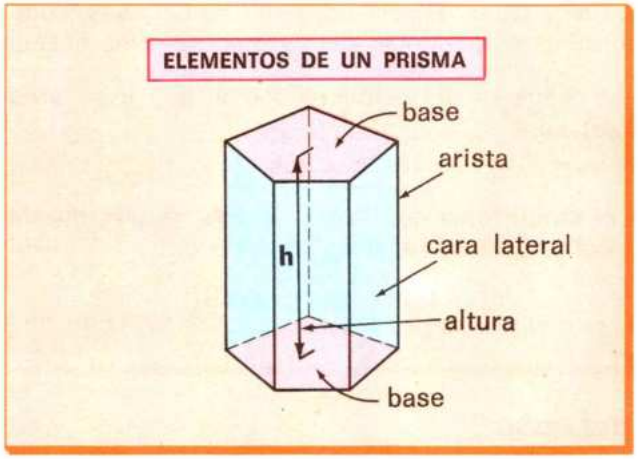
Desarrollo de los poliedros regulares.



Si se extienden sobre un plano las caras de un poliedro se obtiene una figura plana que es el desarrollo de dicho poliedro.

Observa los desarrollos de las 20 caras del icosaedro y de las 8 caras del octaedro.

Los prismas.

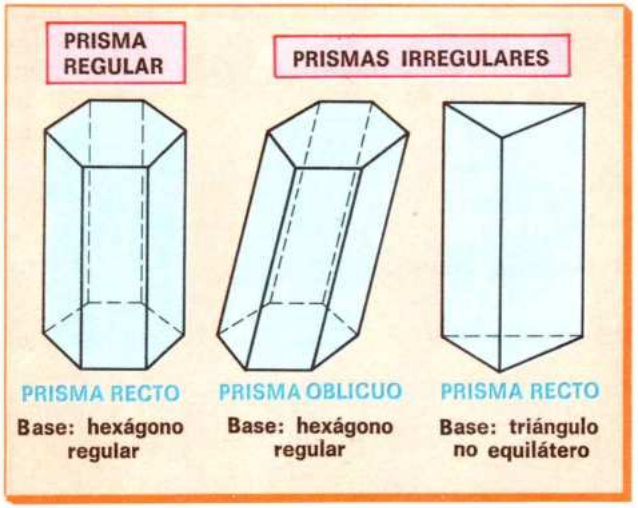


Los **prismas** son poliedros cuyas caras laterales son tres o más paralelogramos y cuyas bases son polígonos iguales y paralelos.

Altura de un prisma es la distancia entre las bases.

Según sean los polígonos de las bases, los prismas pueden ser **triangulares, cuadrangulares, pentagonales, hexagonales,** etc.

Prismas rectos y primas regulares.



Prismas rectos son aquellos cuyas caras laterales son rectángulos o cuadrados.

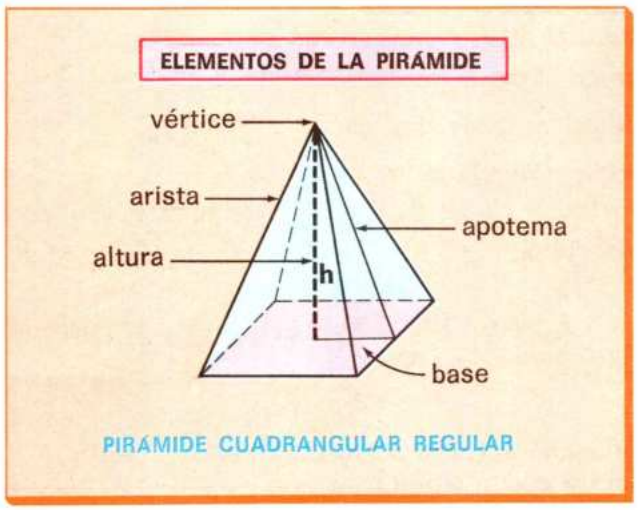
Prismas regulares son los prismas rectos cuyas bases son polígonos regulares.

Paralelepípedos son los prismas cuyas bases son paralelogramos.

Cuando los seis paralelogramos del paralelepípedo son rectángulos, el paralelepípedo se llama **ortoedro** o **paralelepípedo rectángulo.**

El segmento que une dos vértices no situados en la misma cara se llama **diagonal.** Las cuatro diagonales del ortoedro son iguales.

Las pirámides.



Las **pirámides** son los poliedros cuya base es un polígono cualquiera y cuyas caras laterales son triángulos que tienen un vértice común. Este vértice común se llama **vértice** o **cúspide** de la pirámide.

Altura de la pirámide es la distancia del vértice a la base.

Pirámides regulares son aquellas cuya base es un polígono regular y cuyas caras laterales son triángulos isósceles iguales.

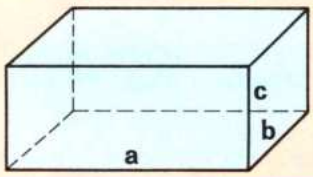
Apotema de una pirámide regular es la altura de cualquiera de sus caras laterales.

Según sea el polígono de la base, las pirámides pueden ser **triangulares, cuadrangulares, pentagonales, hexagonales,** etc.

3. Área de prismas. I

Área del ortoedro.

ORTOEDRO



$At = 2ac + 2bc + 2ab$

Como las seis caras del ortoedro son rectángulos, cualquier par de caras paralelas puede tomarse como bases.

Si las dimensiones del ortoedro son **a**, **b** y **c** su área lateral (**Al**) será:

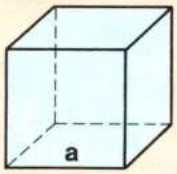
$Al = 2ac + 2bc$

y como el área de las dos bases es 2**ab**, resulta que la fórmula del área total (**At**) del ortoedro es:

$At = 2ac + 2bc + 2ab$

Área del cubo.

CUBO



$At = 6a^2$

El cubo tiene seis caras que son cuadrados.

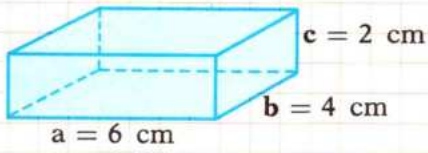
Si la arista mide **a**, el área de una cara será a^2, y el área total del cubo será $6 \cdot a^2$:

$At = 6 \cdot a^2$

1. Dibuja el desarrollo de un ortoedro y di cuántos rectángulos resultan.

2. Dibuja el desarrollo de un cubo y di cuántos cuadrados resultan.

3. Halla el área total del ortoedro de la figura.



4. Contesta:

- La arista de un cubo mide 6 cm. ¿Cuál es su área total?

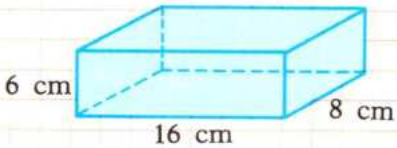
5. Resuelve estos problemas:

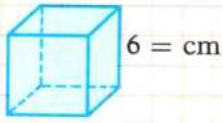
A. ¿Cuántos cubos de 2 cm de arista caben en el ortoedro de la actividad 3?

B. El área total de un cubo es 486 cm^2. Halla el área de una cara.

C. El área de una cara de un cubo es 225 cm^2. Calcula la arista del cubo y el área total.

D. Halla las áreas totales del ortoedro y del cubo.

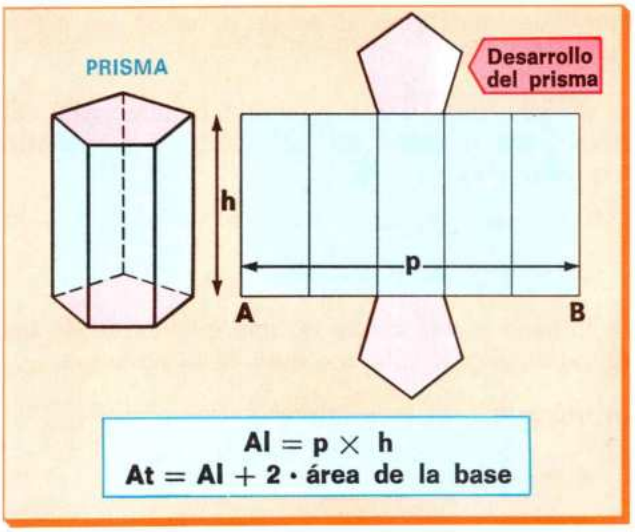




E. Una piscina tiene 8 m de largo, 6 m de ancho y 1,5 m de profundidad. Se pinta la piscina a razón de 800 ptas. el m^2. ¿Cuánto costará pintarla?

4. Área de prismas. II

Área lateral y área total de un prisma recto.



$Al = p \times h$
$At = Al + 2 \cdot$ área de la base

Observa el prisma pentagonal recto y su desarrollo.

En el desarrollo del prisma se observa que las caras laterales forman un rectángulo cuyo lado mayor **AB** tiene la misma longitud que el perímetro de la base del prisma.

Por otra parte, la altura del rectángulo es igual a la altura del prisma.

Por tanto, el área lateral (**Al**) del prisma es igual al producto del perímetro de la base (**p**) por la altura (**h**):

$$Al = p \cdot h$$

El área total es la suma del área lateral y las áreas de las dos bases:

$$At = Al + 2 \cdot \text{área de la base}$$

El área lateral de un prisma recto es igual al producto del perímetro de la base por la altura.
El área total de un prisma recto es igual al área lateral más el área de las bases.

1. Dibuja el desarrollo de un prisma triangular y colorea la superficie lateral.

2. Dibuja el desarrollo de un prisma hexagonal y colorea la superficie total.

3. Resuelve estos problemas:

A. Halla el área lateral de un prisma hexagonal regular de 3 cm de arista básica y 5 cm de altura.

B. Halla el área lateral de un prisma triangular regular de 5 cm de arista básica y 10 cm de altura.

C. Halla el área total de un prisma cuadrangular regular de 2 cm de arista básica y 8 cm de altura.

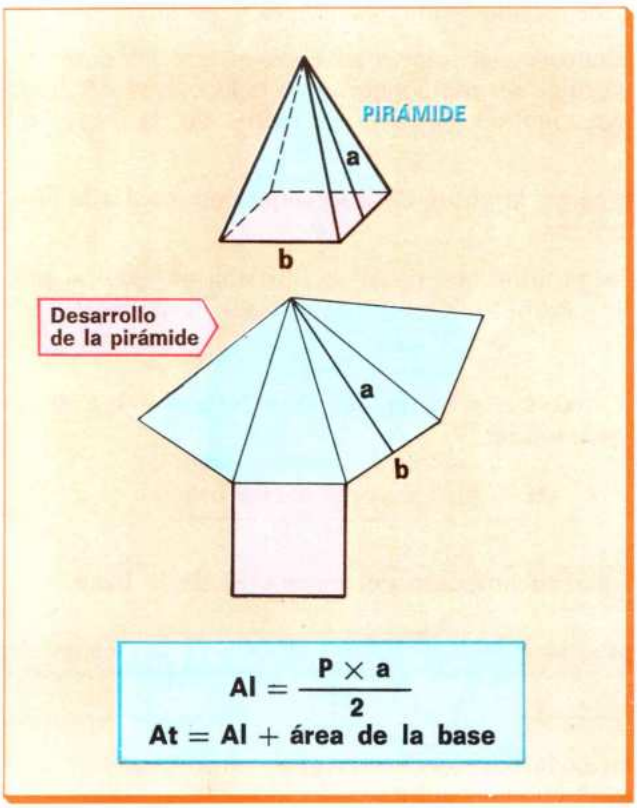
D. Halla el área total de un prisma hexagonal regular de 4 cm de arista básica, 3,4 cm de apotema de la base y 6 cm de altura.

E. Halla el área total de un prisma recto conociendo:
- Perímetro de la base = 100 cm.
- Área de la base = 5 cm^2.
- Altura del prisma = 8 cm.

F. Halla el área total de un prisma recto conociendo:
- Base cuadrangular de 5 cm de lado.
- Altura del prisma = 10 cm.

G. Halla el área total de un prisma recto conociendo:
- Base rectangular de 10 cm de largo por 6 de ancho.
- Altura del prisma = 14 cm.

5. Pirámide. Área lateral y área total



$$Al = \frac{P \times a}{2}$$

At = Al + área de la base

Área lateral y área total de una pirámide.

Área lateral de una pirámide es la suma de las áreas de sus caras laterales.

Observa el desarrollo de la pirámide cuadrangular. El área lateral será la suma de las áreas de los cuatro triángulos isósceles.

El área de un triángulo es:

$$A = \frac{b \times a}{2}$$

siendo **b** la base y **a** la altura de una cualquiera de las caras laterales, es decir, la apotema de la pirámide.

Si hay **n** triángulos, el área lateral será:

$$A = \frac{b \times a \times n}{2} = \frac{(b \times n) \times a}{2}$$

Como **b** × **n** es el perímetro de la base y **a** es la apotema de la pirámide, la fórmula del área lateral es:

$$Al = \frac{P \times a}{2}$$

Área total de una pirámide es la suma del área lateral con el área de su base:

At = Al + área de la base

El área lateral de una pirámide regular es igual al producto del perímetro de la base por la apotema de la pirámide partido por dos.

El área total de una pirámide es igual al área lateral más el área de la base.

1. Dibuja el desarrollo de una pirámide triangular y colorea la superficie lateral.

2. Dibuja el desarrollo de una pirámide hexagonal y colorea la superficie total.

3. Resuelve estos problemas:

A. Halla el área lateral de una pirámide cuadrangular regular de 2 cm de arista básica y 4 cm de apotema.

B. Halla el área lateral de una pirámide triangular regular de 4 cm de arista básica y 6 cm de apotema.

C. Halla el área total de una pirámide cuadrangular regular de 3 cm de arista básica y 10 cm de apotema.

D. Halla el área total de una pirámide regular conociendo:

- Perímetro de la base = 30 cm.
- Área de la base = 6 cm^2.
- Apotema = 1 cm.

E. Halla el área total de una pirámide regular conociendo:

- Base cuadrangular de lado 5 cm.
- Apotema de la pirámide = 8 cm.

Actividades

1. Dibuja una pirámide triangular. Traza su altura y su apotema.

2. Define la pirámide regular y dibuja una pirámide pentagonal regular.

3. El perímetro de una pirámide cuadrangular regular es 16 cm y su apotema mide 8 cm. Calcula el área lateral.

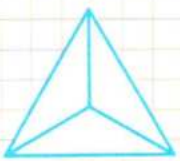
4. Calcula el área total de una pirámide cuadrangular regular de lado 4 cm y apotema 10 cm.

5. Una pirámide, ¿es un poliedro? ¿Y un paralelogramo?

6. Dibuja el desarrollo de una pirámide regular. Colorea su área lateral y su área total.

7. El tetraedro es un poliedro limitado por cuatro caras que son triángulos equiláteros.

   Dibuja el desarrollo del tetraedro.



8. Calcula el área lateral de un tetraedro, sabiendo que el área de la base es 16 cm^2.

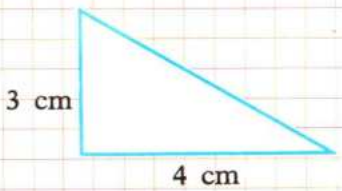
9. Si el área total del tetraedro es 24 cm^2, ¿cuál será el área de su base?

10. ¿Qué relación hay entre el área lateral y el área total de un tetraedro?

11. Calcula el área lateral de un tetraedro que mide de lado 8 cm.

12. Calcula el área total de un tetraedro que mide de lado 10 cm.

13. Calcula el área lateral y total de un tetraedro cuyo lado mide lo mismo que la hipotenusa del triángulo rectángulo de la figura.

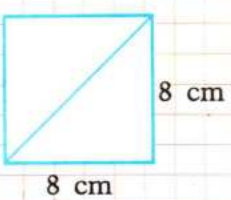


14. Si una pirámide regular de base cuadrada tiene de área lateral 100 m^2, ¿cuál será el área de cada una de sus caras laterales?

15. Si en una pirámide hexagonal regular una de las caras laterales tiene de área 12 cm^2, ¿cuál será el área lateral de la pirámide?

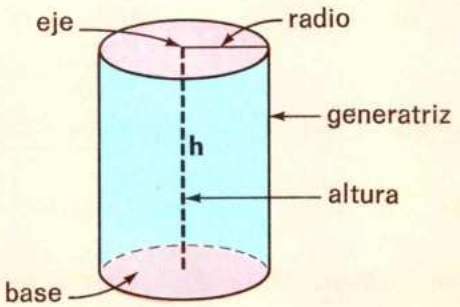
16. En una pirámide pentagonal regular, el área de la base es 8 cm^2 y el área de una de sus caras laterales es 25 cm^2. Calcula el área total de la pirámide.

17. Calcula el área lateral de una pirámide que tiene por base un cuadrado de lado 8 cm y como apotema la diagonal de dicho cuadrado.



El cilindro.

CILINDRO: ELEMENTOS



El **cilindro** es el cuerpo engendrado por un rectángulo que gira alrededor de uno de sus lados.

Eje del cilindro es el lado fijo alrededor del cual gira el rectángulo.

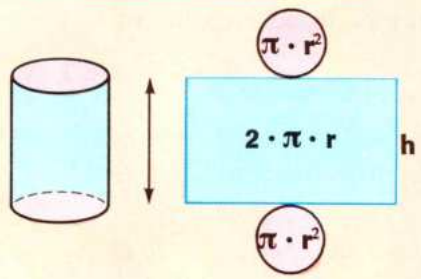
Generatriz del cilindro es el lado opuesto al eje, y es el lado que engendra la superficie cilíndrica.

Los otros dos lados del rectángulo son los radios de los círculos que engendran. Estos círculos son las **bases** del cilindro.

Altura del cilindro es la distancia entre las dos bases; esta distancia es igual a la generatriz.

Área lateral y área total del cilindro.

DESARROLO DEL CILINDRO



$$Al = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$
$$At = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2$$

Observa el desarrollo del cilindro.

El área lateral es un rectángulo que tiene por base la longitud de la circunferencia de la base y por altura la generatriz:

área lateral = longitud de la circunferencia de la base × × generatriz $= 2 \times \pi \times r \times h$

El área total del cilindro es igual al área lateral más el área de las dos bases:

área total $= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2$

$$At = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (h + r)$$

1. Cita ejemplos de objetos de forma cilíndrica.

2. Dibuja un cilindro y señala el eje, la generatriz y la altura.

- ¿Son de igual longitud?

3. Resuelve estos problemas:

A. Halla el área lateral de un cilindro de 2 cm de radio y 6 cm de altura.

B. Halla el área lateral de un cilindro de 6 cm de diámetro y cuya altura es el doble del radio.

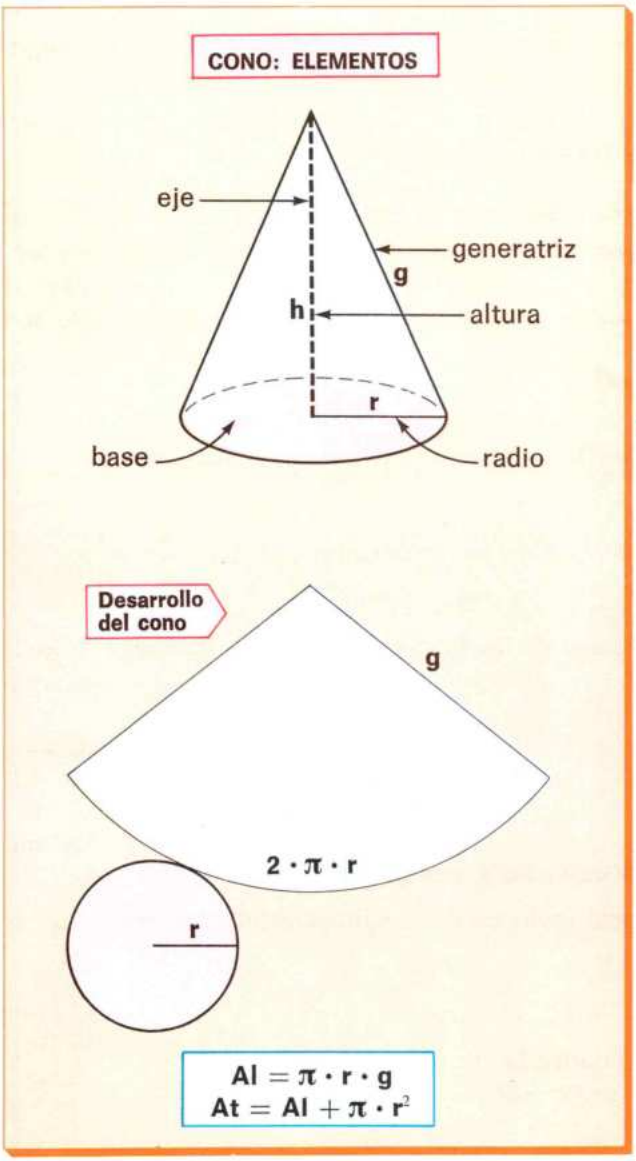
C. Halla el área total de un cilindro de 4 cm de radio y 8 cm de altura.

D. Halla el área total de un cilindro de 2 cm de radio y cuya altura es el triple del diámetro

E. Si dos cilindros tienen la misma altura y el área lateral de uno es el doble que el área lateral del otro, ¿qué relación habrá entre los radios de sus bases?

F. Halla el área lateral y total de un cilindro de 20 cm de radio y 30 cm de altura.

El cono.



El **cono** es el cuerpo engendrado por un triángulo rectángulo al girar alrededor de uno de sus catetos.

Eje del cono es el cateto fijo alrededor del cual gira el triángulo.

Generatriz del cono es la hipotenusa del triángulo rectángulo. El otro cateto del triángulo rectángulo es el radio del círculo que engendra. Este círculo es la **base del cono.**

Altura del cono es la distancia del vértice a la base.

Área lateral y área total del cono

En este desarrollo se observa que la superficie lateral del cono se transforma en un sector circular. Por tanto, el área lateral del cono es el área del sector circular rayado. La longitud del arco es la longitud de la circunferencia de la base, y el radio del sector circular es la generatriz del cono.

El área del sector circular es igual a la longitud del arco por el radio partido por dos.

$$\text{Área sector} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot n}{360} = \frac{\pi \cdot r \cdot n}{180} \cdot \frac{r}{2} = \frac{\text{long. arco} \cdot r}{2}$$

Como el radio del sector es la generatriz del cono resulta:

$$\text{área lateral del cono} = \frac{\text{longitud del arco} \cdot \text{radio}}{2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot g}{2} = \pi \cdot r \cdot g$$

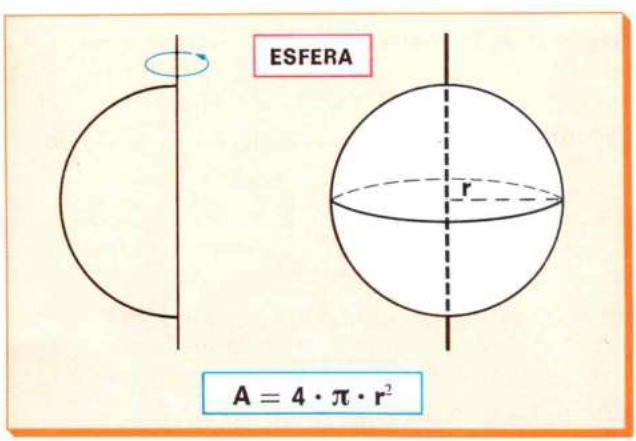
$$Al = \pi \cdot r \cdot g$$

El área total del cono es igual al área lateral más el área de la base:

$$\text{Área total} = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2$$

$$At = \pi \cdot r \cdot (g + r)$$

La esfera.



Si una semicircunferencia gira sobre su diámetro, engendra una superficie llamada **superficie esférica.**

El cuerpo limitado por la superficie esférica se llama **esfera.**

Se puede probar que el área (**A**) de la superficie esférica de radio **r** es igual a cuatro veces el área de uno de sus círculos máximos, es decir:

$$\text{Área de la esfera} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

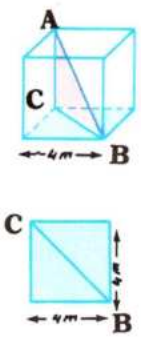
CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

1. Halla el área lateral de un cubo de arista 3 cm.
2. Halla el área total de un cubo de arista 2 cm.
3. Si el área de la base de un cubo es 16 cm^2 ¿cuál será su área lateral?
4. Si el área lateral de un cubo es 36 cm^2 ¿cuál será su arista?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Halla el área total de un prisma recto sabiendo que la base es un triángulo equilátero de lado 6 cm y la altura del prisma es de 10 cm.
2. Halla el área total de un prisma recto sabiendo que la base es un hexágono regular de lado 8 cm y la altura del prisma es de 12 cm.
3. Halla el área total de una pirámide regular cuya base es un hexágono de 3 cm de lado si la apotema de la pirámide mide 6 cm.
4. Cálculo de la diagonal del cubo.

EJEMPLO RESUELTO



Halla la diagonal de un cubo de 4 cm de lado.

El triángulo **ABC** es rectángulo en **C**, y aplicando el teorema de Pitágoras resulta:

$\mathbf{AB^2 = AC^2 + BC^2}$ [1]

$\mathbf{AC} = 4$ cm

BC es la diagonal del cuadrado de lado 4 cm.

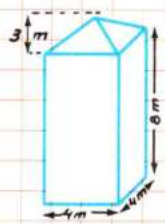
$\mathbf{BC^2} = 4^2\ cm^2 + 4^2\ cm^2 = 32\ cm^2$

Sustituyendo en [1]:

$\mathbf{AB^2} = 4^2\ cm^2 + 32\ cm^2 = 48\ cm^2$

$\mathbf{AB} = \sqrt{48\ cm^2} = 6{,}9$ cm es el valor de la diagonal.

5. Halla la diagonal de un cubo de 2 cm de lado y la diagonal de un ortoedro cuyas dimensiones son 7, 2 y 5 cm.
6. Calcula el área total de la figura con los datos que se indican.



7. Calcula el área lateral de un cilindro de radio 10 cm y de altura 20 cm. ¿Qué relación hay entre el área lateral y èl área de su base?
8. El área total de un cilindro es de 60 cm^2. Si el área de la base es 10 cm^2, ¿cuál será su área lateral?

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. Un agricultor tiene un campo sembrado de trigo. Las dimensiones del campo son de 30 m de largo y 15 m de ancho. Quiere ponerle una valla hasta una altura de 2 m.

¿Qué cantidad de valla necesita?

2. Juan va a pintar la piscina de su jardín. La piscina tiene 10 m de largo por 6 m de ancho, y la profundidad es de 3 m.

¿Cuántos kilogramos de pintura tendrá que comprar si gasta 1 kg por 2 m^2?

3. Se desea pintar las cuatro paredes y el techo de una habitación de 5 m de largo, 3 metros de ancho y 2 m de alto, a 250 ptas. el metro cuadrado.

¿Cuánto costará pintarla?

4. Se quiere forrar de tela una colchoneta de 3 m de largo, 2 m de ancho y 0,5 de alto.

¿Cuántos metros cuadrados de tela necesitaremos?

5. Se desea cubrir con una capa de arena un terreno de forma rectangular de 9 m de largo por 5 m de ancho.

¿Cuántos kilogramos de arena se necesitarán si utiliza 10 kg por metro cuadrado?

6. Se quiere hacer 10 cajas de cartón de forma de ortoedro de dimensiones 30 cm de largo, 15 cm de ancho y 10 cm de alto.

¿Cuánto cartón precisamos?

7. Calcula la cantidad de hojalata que se necesitará para hacer 10 botes de forma cilíndrica de 10 cm de diámetro y 20 cm de altura.

8. Se quiere construir un depósito de cinc de forma cilíndrica, con tapa. Las dimensiones del depósito son 4 m de diámetro y 6 m de altura.

El metro cuadrado de cinc cuesta 200 ptas. ¿Cuál será el importe del cinc empleado en el depósito?

9. Calcula la cantidad de pintura necesaria para pintar 50 columnas de forma cilíndrica de 1 m de diámetro y 3 m de altura si se precisa 0,5 kg de pintura por metro cuadrado.

10. En una fuente se van a poner tres caños de bronce, de forma cilíndrica, de dimensiones 25 cm de largo cada uno, dos de ellos con un radio de 3 cm y el otro de 2 m.

Calcula el bronce que se precisa.

11. En la fiesta de cumpleaños de Ana se han hecho 10 gorros de forma cónica, para sus amigos, en papel plateado.

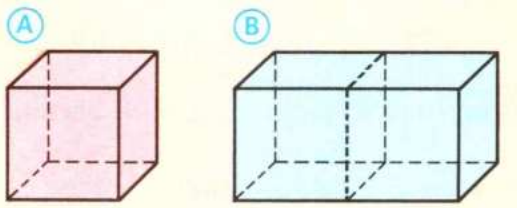
¿Cuánto papel se habrá utilizado si las dimensiones del gorro son 15 cm de radio y 25 cm de generatriz?

12. ¿Cuántos metros cuadrados serán necesarios para construir cinco embudos de forma cónica si el radio de la base mide 5 cm y la generatriz del embudo mide 15 cm?

TEMA 23 VOLÚMENES DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

1. Volumen. Unidades. I

Concepto de volumen.



Volumen figura (A) < volumen figura (B)

Observa las dos figuras del dibujo.

La figura (B) ocupa mayor espacio que la figura (A)

Diremos entonces que la figura (B) tiene **mayor volumen** que la figura (A).

Además, como la figura (B) contiene dos veces la figura (A), el volumen de la figura (B) es el doble del volumen de la figura (A)

Volumen es la medida del espacio que ocupa un cuerpo.

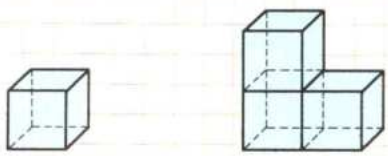
1. Contesta:

a) Una línea recta, ¿tendrá volumen?

b) Un polígono cualquiera, ¿tendrá volumen?

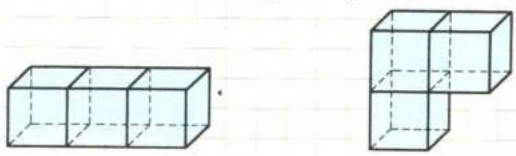
c) Pon tres ejemplos de cuerpos que tengan volumen.

d) ¿Qué relación hay entre los volúmenes de estas figuras?



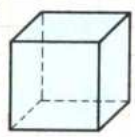
e) Si dos cuerpos tienen el mismo volumen, ¿es necesario que tengan la misma forma?

f) ¿Tienen el mismo volumen los cuerpos siguientes?



2. Resuelve estos problemas:

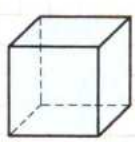
A. Dibuja un ortoedro tal que su volumen sea 4 veces mayor que el volumen del cubo de la figura.



B. Dibuja dos cilindros de igual base, tal que el volumen de uno sea el doble del volumen del otro.

C. Para llenar una caja de forma de ortoedro con cajas de forma cúbica hemos necesitado 20 cajas, y para llenar otra caja hemos necesitado 40 cajas. ¿Qué relación hay entre los volúmenes de las dos cajas?

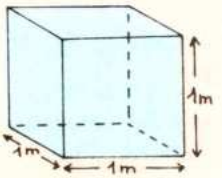
D. Dibuja un cubo cuyo volumen sea ocho veces mayor que el cubo de la figura.



2. Volumen. Unidades. II

Unidad principal de volumen.

EL METRO CÚBICO (m^3)



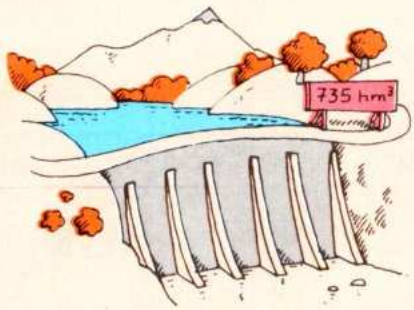
Observa el cubo de la figura.

Es un cubo de 1 m de lado. Se llama **metro cúbico** y es una unidad principal de volumen. Se escribe **m^3**.

Metro cúbico es el volumen de un cubo de un metro de lado.

Otras unidades de volumen.

El volumen de agua embalsada se expresa en hm^3



Si tomamos el cubo que tiene de arista cualquiera de los múltiplos del metro, tenemos los **múltiplos del metro cúbico:**

- **1 km^3** es el volumen de un cubo de 1 km de lado.
- **1 hm^3** es el volumen de un cubo de 1 hm de lado.
- **1 dam^3** es el volumen de un cubo de 1 dam de lado.

Si tomamos el cubo que tiene de arista cualquiera de los submúltiplos del metro, tenemos los **submútiplos del metro cúbico:**

- **1 dm^3** es el volumen de un cubo de 1 dm de lado.
- **1 cm^3** es el volumen de un cubo de 1 cm de lado.
- **1 mm^3** es el volumen de un cubo de 1 mm de lado.

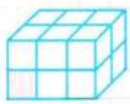
Los múltiplos del metro cúbico son unidades muy grandes y se usan con poca frecuencia.

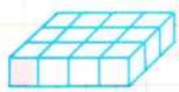
1. Contesta:

a) Para medir el volumen de un cubito de hielo, ¿qué unidad de volumen usarías?

b) ¿Y para medir el volumen de una habitación?

c) Si te dan como unidad de volumen 1 cm^3, ¿cuál será el volumen de las figuras?





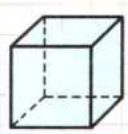
d) ¿Cuántos centímetros cúbicos necesitamos para cubrir una superficie cuadrada de 5 cm de lado?

e) ¿Cuántos decímetros cúbicos necesitamos para cubrir una superficie cuadrada de 1 m de lado?

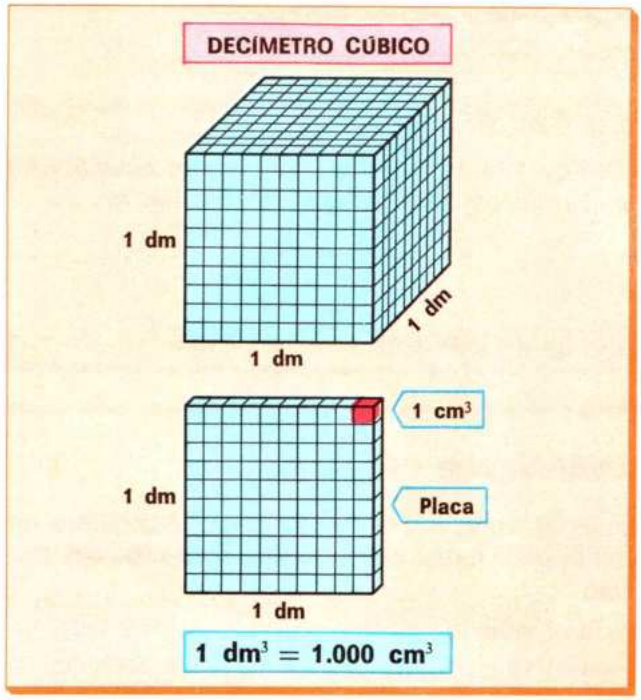
2. Resuelve estos problemas:

A. Tomando como unidad de volumen 1 cm^3, dibuja 3 figuras que tengan 8 cm^3 de volumen.

B. Queremos llenar una caja de forma cúbica de 2 m de lado con cajitas de forma cúbica de 1 m de lado. ¿Cuántas cajitas necesitaremos?



3. Relación entre las unidades de volumen



Observa el cubo de la figura. Es un cubo de 1 dm de lado, es decir, es **1 dm³**.

Está dividido en cubos más pequeños de 1 cm de lado. Cada uno de estos cubos es **1 cm³**.

¿Cuántos centímetros cúbicos tiene 1 dm³?

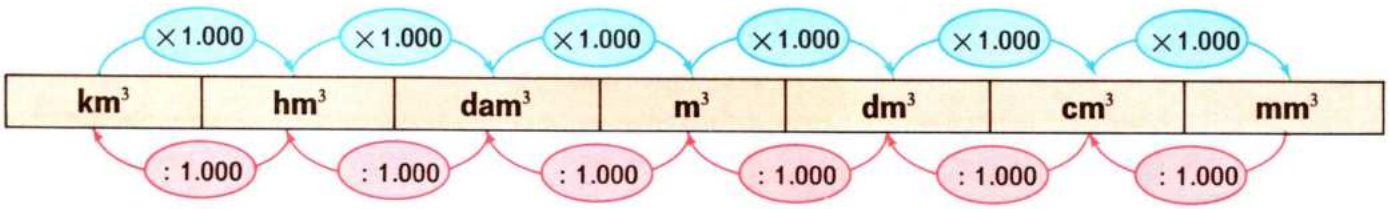
Observa la placa de color azul.

Es una placa de 1 dm de lado, y en cada lado hay 10 cm³. En toda la placa hay un total de 100 cm³.

Para formar un cubo de 1 dm de lado (1 dm³) necesitaremos 10 placas como la anterior.

Por tanto: 1 dm³ = 100 cm³ × 10 = **1.000 cm³**.

Observa las relaciones que existen entre las unidades de volumen:



Cada unidad de volumen es 1.000 veces mayor que la inmediata inferior y 1.000 veces menor que la inmediata superior.

1. Pasa a incomplejo de metros cúbicos, 3 dam³ y 5 hm³.

2. Pasa a incomplejo de decímetros cúbicos, 6 m³ y 2 dm³.

3. Expresa en forma compleja:

a) 18.400 dm³ c) 345 cm³ e) 3.400.200 m³ g) 4.348 dm³

b) 1.200 dam³ d) 54.006 mm³ f) 4.300 cm³ h) 5.496 dm³

4. Resuelve estos problemas:

A. El volumen de un cuerpo es 400 dam³. Otro cuerpo tiene doble volumen que él. ¿Cuál será el volumen del nuevo cuerpo en hectómetros cúbicos?

B. Un cuerpo tiene de volumen 2.000 dm³ y otro cuerpo tiene de volumen 2 m³. ¿Cómo son sus volúmenes?

5. Di si son verdaderas o falsas las siguientes igualdades:

1 dam³ = 1.000 m³ 1 cm³ = 0,001 dm³ 8 m³ = 8.000.000 de cm³

9 dm³ = 0,09 m³ 4 mm³ = 0,00004 dm³ 32 m³ = 0,032 dam³

4. Relaciones entre las unidades de volumen y las de capacidad y masa

EQUIVALENCIAS
CAPACIDAD ⇄ VOLUMEN

1 kl = capacidad de 1 m^3

1 l = capacidad de 1 dm^3

1 ml = capacidad de 1 cm^3

Relación entre las unidades de volumen y las unidades de capacidad.

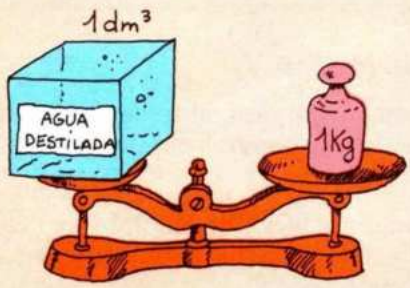
La relación entre las unidades de volumen y las unidades de capacidad viene determinada por la definición de litro.

Un litro es la capacidad de 1 dm^3.

Como 1 m^3 = 1.000 dm^3 y 1.000 l = 1 kl, resulta que a un volumen de 1 m^3 corresponde una capacidad de 1 kl.

Como 1 cm^3 = 0,001 dm^3 y 1 ml = 0,001 l, resulta que a un volumen de 1 cm^3 corresponde una capacidad de 1 ml.

EQUIVALENCIAS
CAPACIDAD ⇄ VOLUMEN ⇄ MASA



1 kl = capacidad de 1 m^3 = masa de 1 t

1 l = capacidad de 1 dm^3 = masa de 1 kg

1 ml = capacidad de 1 cm^3 = masa de 1 g

Relación entre las unidades de volumen, las unidades de capacidad y las de masa.

Para definir las unidades de masa se ha elegido el agua destilada o agua pura.

1 kg es la masa que tiene el agua pura que cabe en un recipiente de 1 dm^3 de volumen.

Como 1 cm^3 = 0,001 dm^3 y 1 mg = 0,001 kg, resulta que 1 mg es la masa que tiene el agua pura que cabe en un recipiente de 1 cm^3.

Como 1 m^3 = 1.000 dm^3 y 1 t = 1.000 kg, resulta que 1 t (tonelada métrica) es la masa que tiene el agua destilada que cabe en un recipiente de 1 m^3.

Observa resumidas estas relaciones.

Las relaciones entre las medidas de capacidad y volumen son válidas para todos los líquidos, pero las relaciones de las unidades de volumen con las unidades de masa sólo son ciertas cuando se utiliza el agua destilada.

1 cm^3 de agua pura tiene una masa de 1 g. En cambio, 1 cm^3 de mercurio tiene una masa de 13,6 g.

La masa de una unidad de volumen de una sustancia se llama **densidad** de esa sustancia. Así la densidad del mercurio es 13,6 g por cm^3.

1. Pasa a litros los siguientes volúmenes:

a) 3 dm^3 b) 4 m^3 c) 1.000 cm^3

2. Calcula el volumen en metros cúbicos que ocupan 8 hl y 4 kl de agua.

3. ¿Cuántos kilogramos pesarán 3 l, 2 dal y 3 hl de agua?

4. Resuelve estos problemas:

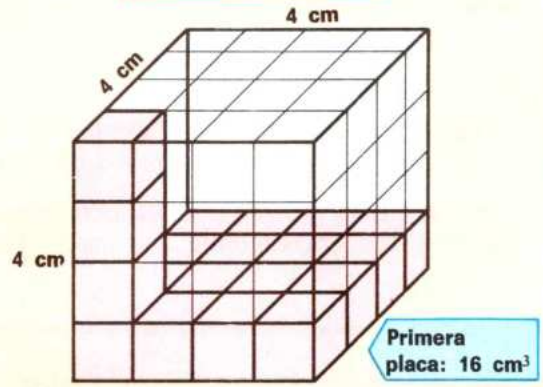
A. El agua contenida en una vasija pesa 4 kg. Calcula el volumen que ocupa en metros cúbicos, decímetros cúbicos y centímetros cúbicos.

B. Calcula el volumen en decímetros cúbicos y la masa en gramos de 4 dal, 2 l, 3 dl de agua.

5. Volumen del cubo y del ortoedro

Volumen del cubo.

VOLUMEN DEL CUBO



$V = 4\ cm \cdot 4\ cm \cdot 4\ cm = 4\ cm^3 = 64\ cm^3$

$V = a \cdot a \cdot a = a^3$

¿Cuál es el volumen del cubo de la figura cuya arista mide 4 cm? Vamos a ver cuántos centímetros cúbicos tiene el cubo de la figura.

Observa que en el cubo de la figura caben cuatro placas como la placa inferior.

Para cubrir la primera placa con centímetros cúbicos, necesitamos 4 cm^3 en cada lado, es decir, un total de 16 cm^3.

Como tenemos cuatro capas iguales a la anterior, el volumen del cubo será:

$V = 16\ cm^3 \times 4 = 64\ cm^3 = 4\ cm \times 4\ cm \times 4\ cm$

Observa que $64 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$; es decir, el volumen del cubo se obtiene elevando la arista al cubo.

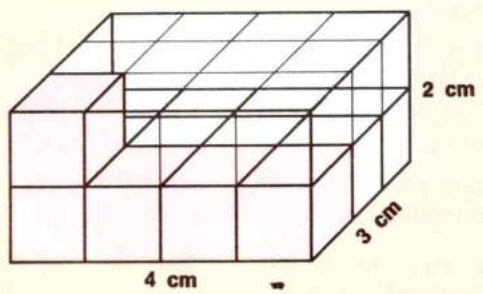
En general, si la arista mide **a** cm, el volumen del cubo será:

Volumen del cubo $= a \cdot a \cdot a = a^3$

Volumen del cubo = arista × arista × arista.
El volumen de un cubo se obtiene elevando al cubo la medida de su arista.

Volumen del ortoedro.

VOLUMEN DEL ORTOEDRO



$V = 4\ cm \times 3\ cm \times 2\ cm = 24\ cm^3$

$V = a \cdot b \cdot c$

¿Cuál es el volumen del ortoedro de la figura cuyas dimensiones son 4 cm de largo, 3 cm de ancho y 2 cm de alto?

Para cubrir la primera placa con centímetros cúbicos necesitamos 4 cm^3 a lo largo por 3 cm^3 a lo ancho, es decir, necesitamos 12 cm^3.

Como tenemos dos placas iguales a ésta, el volumen del ortoedro será:

$V = 12\ cm^3 \times 2 = 24\ cm^3 = 4\ cm \times 3\ cm \times 2\ cm$

Observa que el volumen del ortoedro (**24 cm^3**) se obtiene multiplicando sus tres dimensiones: largo (4 cm) por ancho (3 cm) por alto (2 cm).

En general, el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones son **a**, **b** y **c**, es:

Volumen del ortoedro $= a \cdot b \cdot c$

El volumen del ortoedro es igual al producto de sus tres dimensiones.

1. Calcula:

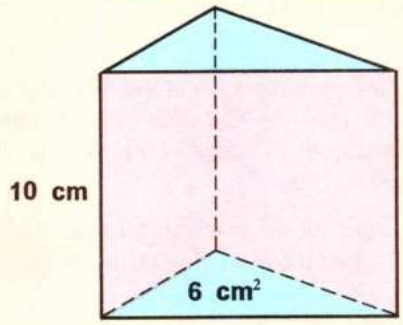
a) El volumen, en decímetros, de un cubo que tiene 2 m de arista.

b) El volumen, en metros cúbicos, de un cubo que tiene 10 dm de arista.

c) El volumen de un ortoedro de dimensiones 5 m de largo, 4 m de ancho y 3 m de alto. Expresa el resultado en decímetros cúbicos y centímetros cúbicos.

6. Volumen de prismas y pirámides

VOLUMEN DEL PRISMA



$V = 6\ cm^2 \cdot 10\ cm = 60\ cm^3$

A = área de la base

h = altura

$$V = A \cdot h$$

Volumen del prisma recto.

¿Cuál es el volumen del prisma triangular de la figura si el área de la base es 6 cm^2 y su altura 10 cm?

Para cubrir la base con centímetros cúbicos se necesitarán tantos centímetros cúbicos como indica su área, en este caso 6 cm^3.

Como la altura del prisma es 10 cm, necesitaremos 10 placas iguales a la anterior; por tanto, el número total de centímetros cúbicos será:

$$6\ cm^3 \times 10 = \mathbf{60\ cm^3}$$

Observa que el volumen del prisma se obtiene multiplicando el área de la base por la altura del prisma.

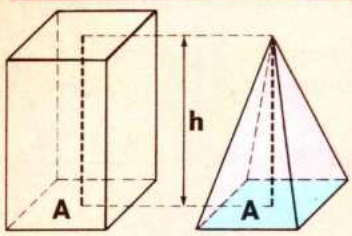
$$V = 6\ cm^2 \times 10\ cm = 60\ cm^3$$

Del mismo modo se procede en los demás prismas rectos. En general, si en un prisma recto se designa por **A** el área de la base y por **h** la altura, resulta la siguiente fórmula del volumen:

$$V = A \cdot h$$

El volumen de un prisma recto es igual al producto del área de su base por su altura.

VOLUMEN DE LA PIRÁMIDE



A = area de la base
h = altura

$$V = \frac{A \cdot h}{3}$$

Volumen de la pirámide.

Observa el dibujo. En él hay un prisma y una pirámide de igual base e igual altura.

Si llenamos de agua la pirámide y la echamos en el prisma, comprobaremos que en el prisma cabe exactamente tres veces el contenido de la pirámide.

Esto indica que el volumen de la pirámide es tres veces menor que el volumen del prisma de igual base e igual altura.

Si en una pirámide se designa por **A** el área de la base y por **h** la altura, resulta la siguiente fórmula del volumen:

$$V = \frac{A \cdot h}{3}$$

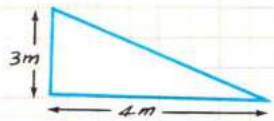
El volumen de una pirámide es igual a un tercio del área de la base por la altura.

1. Calcula:

a) El volumen de un prisma cuya área de la base es 20 cm^2 y cuya altura mide 8 cm.

b) El volumen de un prisma cuya base es el hexágono regular de 6 cm lado y cuya altura mide 10 cm.

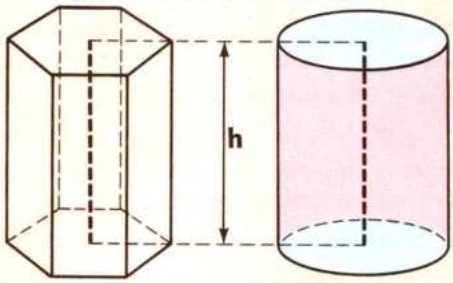
c) El volumen de un prisma cuya base es el triángulo rectángulo de la figura y cuya altura mide 2 m.



7. Volumen de cilindros y conos

Volumen del cilindro.

VOLUMEN DEL CILINDRO



Área base $= \pi \cdot r^2$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Observa el dibujo. En él hay un prisma hexagonal y un cilindro cuyas bases tienen la misma área y cuyas alturas son iguales.

Si llenamos de agua el prisma y la echamos en el cilindro, comprobaremos que el cilindro queda completamente lleno; por tanto, el cilindro y el prisma de la figura tienen el mismo volumen.

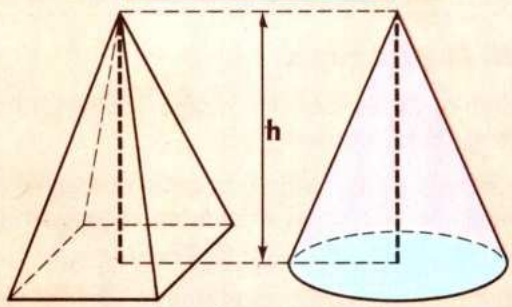
Como la base del cilindro es un círculo, su área es $\pi \cdot r^2$, y como la altura es **h**, el volumen del cilindro es:

$$\text{Volumen del cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

El volumen del cilindro es igual al producto del área de la base por la longitud de la altura.

Volumen del cono.

VOLUMEN DEL CONO



Área base $= \pi \cdot r^2$

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

Observa el dibujo. En él hay una pirámide y un cono cuyas bases tienen la misma área y cuyas alturas son iguales. También se puede comprobar que la pirámide y el cono de la figura tienen el mismo volumen.

Como la base del cono es un círculo, su área es $\pi \cdot r^2$, y como la altura es **h**, el volumen del cono es:

$$\text{Volumen del cono} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

El volumen de un cono es igual a un tercio del área de la base por la altura.

1. Halla:

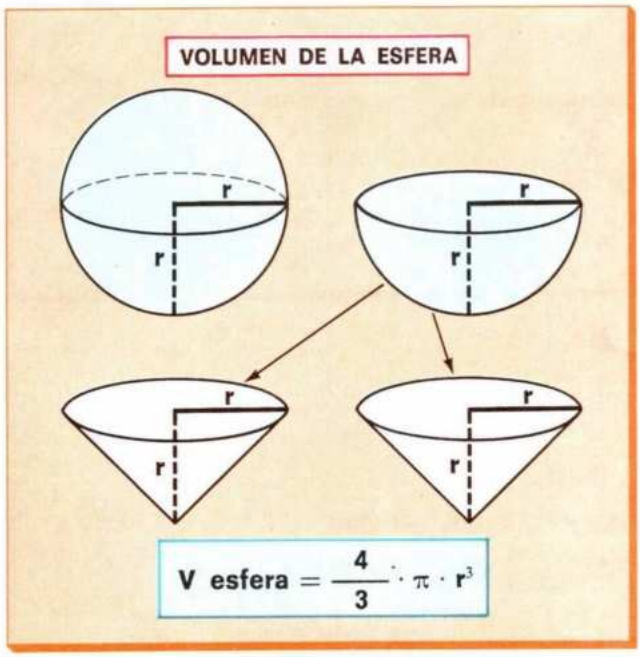
a) El volumen de un cilindro cuya área de la base es 20 cm² y cuya altura mide 8 cm.

b) El volumen de un cilindro cuyo radio de la base mide 3 cm y cuya altura mide 4 dm.

c) El volumen de un cilindro cuya base tiene una longitud 12π cm y cuya altura mide 3 dm ($L = 2 \cdot \pi \cdot r$, $r = \frac{L}{2 \cdot \pi}$).

d) El volumen de un cono cuyo radio de la base mide 8 cm y cuya altura mide 1 m.

8. Volumen de la esfera



Volumen de la semiesfera y de la esfera.

Observa una esfera de radio **r** y dos conos cuyos radios y alturas son iguales al radio de la esfera.

Se puede comprobar que en la semiesfera hueca de radio **r** cabe la misma cantidad de agua que en los dos conos de radio **r** y altura **r**.

De esta experiencia resulta que:

- El volumen de cada semiesfera = 2 · volumen del cono.

  Por tanto:

$$\text{Volumen semiesfera} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{2}{3} \pi \cdot r^3$$

- El volumen de la esfera es el doble que el de la semiesfera:

$$V = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$$

$$\text{Volumen de la esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

El volumen de una esfera es igual a cuatro tercios de $\pi \cdot r^3$.

1. Calcula:

a) El volumen de una esfera cuyo radio mide 2 dm.

b) El volumen de una esfera cuyo diámetro mide 4 dm.

c) El volumen de una esfera, en decímetros cúbicos, cuyo radio mide 1 m.

d) Calcula los volúmenes de dos esferas, una de radio 3 cm y otra de radio 6 cm.
¿Qué relación hay entre sus volúmenes?

e) Calcula los volúmenes de dos esferas, una de diámetro 8 centímetros y otra de diámetro 24 cm.
¿Qué relación hay entre sus volúmenes?

2. Contesta:

a) El volumen de una semiesfera es $\frac{7}{2}$ dm³

¿Cuál será el volumen de la esfera en metros cúbicos?

b) ¿Cuántos litros de agua caben en una esfera de 1 m de radio?

c) ¿Cuántos kilogramos pesará el agua contenida en la esfera anterior?

3. Resuelve estos problemas:

A. El radio de una esfera es 4 cm. Calcula el volumen de otra esfera cuyo radio es el doble del diámetro de la esfera anterior.

B. El volumen de una esfera es 8 cm³.
¿Cuál será el volumen de su cuarta parte?

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

1. Calcula el volumen de un cubo de arista 3 cm.
2. Calcula, en decímetros cúbicos, el volumen de un cubo de 2 m de arista.
3. Calcula el volumen de un cubo, sabiendo que el perímetro de una de sus caras es 16 cm.
4. Calcula el volumen de un cubo cuya arista mide $\frac{4}{5}$ de 10 cm.
5. Calcula el volumen de un cubo cuya arista mide los 3/4 de 8 cm.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Expresa en forma de incomplejo de centímetros cúbicos:

   a) 6 hm^3 4 dam^3 2 m^3 c) 10 dam^3 4 m^3 3 dm^3

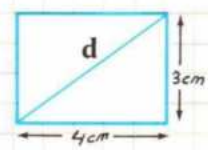
   b) 4 m^3 2 dm^3 1 cm^3 d) 3 m^3 2 dm^3 1 mm^3

2. Expresa en forma de complejo:

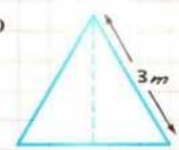
   a) 3.200 dam^3 b) 4.320.100 m^3 c) 3.426 cm^3 d) 1.200 mm^3

3. Calcula el volumen, en centímetros cúbicos, de una habitación que tiene 5 m de largo, 40 dm de ancho y 2.500 mm de alto.

4. Calcula el volumen de un cubo que tiene de arista la diagonal del rectángulo de la figura.



5. Calcula la altura que debe tener un prisma que tiene como área de la base 12 dm^2 y 48 litros de capacidad.
6. Calcula el volumen de un prisma hexagonal regular que tiene 8 cm de arista básica y 20 cm de altura.
7. Calcula el volumen de una pirámide cuya base es el triángulo equilátero de la figura y la altura de la pirámide mide 1 m.



8. Calcula la altura que debe tener un cilindro para que tenga una capacidad de 60 dm^3, si el área de su base es de 6 dm^2.
9. Calcula la cantidad de agua, en decalitros, que cabe en un recipiente de forma cónica cuyo diámetro de la base mide 12 dm y cuya altura mide 3 m.
10. Calcula el volumen de una esfera de 4 cm de radio.
11. Calcula el volumen de un cono cuya generatriz mide 10 dm y cuyo radio de la base mide 6 dm.

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. Se quiere llenar una piscina de dimensiones 6 m de largo, 5 m de ancho y 4 m de alto.

¿Cuántos litros de agua son necesarios?

2. En un local de dimensiones 5 m de largo, 3 m de ancho y 2 m de alto queremos almacenar cajas de dimensiones 10 dm de largo, 6 dm de ancho y 4 dm de alto.

¿Cuántas cajas podremos meter?

3. Una fuente tiene un caño que echa 25 litros por minuto.

¿Cuánto tiempo tardará en llenar un depósito de 50 m^3 de volumen?

4. Se quiere construir una pared de 12 m de largo, 1 m de ancho y 3 m de alto.

¿Cuántos ladrillos se necesitarán si las dimensiones de un ladrillo son 20 cm de largo, 15 cm de ancho y 4 cm de alto?

5. En una habitación de dimensiones 7 m de largo, 5 m de ancho y 3 m de alto se ha echado en el suelo una capa de cemento de 20 cm de espesor.

¿En cuánto ha disminuido el volumen de la habitación?

6. Un litro de colonia cuesta 500 ptas.

¿Cuánto costará un frasco de forma cilíndrica cuya área de la base es 20 cm^2 y cuya altura mide 7 cm?

7. ¿Qué volumen ocuparán 500 libros, sabiendo que cada uno tiene forma de prisma recto cuyas aristas miden 10 cm, 8 cm y 3 cm, respectivamente?

8. Una piscina en forma de prisma hexagonal tiene 30 m^2 en la base y altura de 4 m. Sabiendo que el agua que contiene son los 2/3 de su capacidad,

¿cuántos litros tiene?

9. Un litro de alcohol pesa menos que un litro de agua.

¿Se podrían meter 2.000 gramos de alcohol en un recipiente que tiene 2 dm^3 de volumen?

10. El volumen de un bloque de pisos es 1.152 m^3. Cada piso tiene de dimensiones 6 m de largo, 4 m de ancho y 2 m de alto.

¿Cuántos pisos tiene dicho bloque?

11. Un litro de aceite pesa menos que un litro de agua. Un bidón de 5 litros nos ha costado 1.050 ptas., y un bidón de 5 kg nos ha costado lo mismo.

¿Qué litro de aceite nos ha salido más barato?

12. Se van a construir dos pirámides cuadrangulares regulares cuya área de la base es 16 m^2 y cuya altura mide 9 m. Se van a utilizar bloques de piedra cúbica de dimensiones 4 dm de largo, 3 dm de ancho y 2 dm de alto.

¿Cuántos bloques se necesitarán?

TEMA 24 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE DATOS

1. Conceptos generales. I.

Unidad estadística y variable estadística.

TABLA	
POBLACIÓN ESTADÍSTICA O CONJUNTO ESTADÍSTICO	VARIABLE ESTADÍSTICA (Nº de discos)
Pedro	4
Juana	3
Luisa	0
Antonio	2
Carlota	5
Javier	3
Miguel	1
José	1

INDIVIDUO

Observa la tabla, donde aparecen los nombres de un grupo de amigos y el número de discos que tiene cada uno.

- Al conjunto de amigos le llamamos **población** o **conjunto estadístico.**
- A cada uno de los amigos le llamamos **individuo** o **unidad estadística.**
- Lo que hemos anotado en el conjunto de amigos es el número de discos de cada uno; a este carácter le llamamos **variable estadística.**

Muestra.

En una fábrica de bombillas eléctricas se quiere estudiar la duración de una gran cantidad de bombillas que ahora están almacenadas. Sería ruinoso para el fabricante probar todas y cada una de las bombillas; por eso elige sólo algunas bombillas del almacén y las pone en funcionamiento. Así podrá averiguar aproximadamente las horas que duran funcionando las bombillas que él fabrica.

En este ejemplo la **población** que se estudia son todas las bombillas fabricadas y la **unidad estadística** es cada una de las bombillas.

El conjunto de las bombillas seleccionadas para la prueba es una **muestra;** observa que la muestra es un subconjunto de la población.

Población o conjunto estadístico es un conjunto de elementos de los que se observa alguna característica.
Individuo o unidad estadística es cada elemento de una población.
Variable estadística es la característica que se observa en la población.
Muestra es un subconjunto de la población total.

1. En un paseo hay 10 árboles cuyas alturas son:

6 m, 5 m, 4,5 m, 6,5 m, 4 m, 4,6 m, 5,5 m, 6,8 m, 7 m, 7,1 m

Une cada rectángulo de la izquierda con su correspondiente de la derecha:

Población o conjunto estadístico.	**Cada árbol del paseo.**
Individuo o unidad estadística.	**El conjunto de los 10 árboles del paseo.**
Variable estadística.	**La altura de los árboles.**

Frecuencias absolutas y frecuencias relativas.

Las calificaciones obtenidas por un grupo de 20 alumnos en una asignatura son las siguientes:

10, 10, 9, 9, 9, 8, 8, 7, 7, 7, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 3

En este ejemplo, la población o conjunto estadístico son los 20 alumnos y la variable estadística es el conjunto de las calificaciones.

El número de alumnos que han obtenido la calificación de 10 es 2. Diremos entonces que la **frecuencia absoluta** de la calificación 10 es 2.

De igual modo:

- La frecuencia absoluta de la calificación 9 es 3.
- La frecuencia absoluta de la calificación 8 es 2.
- La frecuencia absoluta de la calificación 7 es 3.
- La frecuencia absoluta de la calificación 5 es 4.
- La frecuencia absoluta de la calificación 4 es 2.
- La frecuencia absoluta de la calificación 3 es 4.

Si dividimos la frecuencia absoluta dé un valor de la variable estadística por el número de individuos de la población obtenemos la **frecuencia relativa** de dicho valor.

Así:

- La frecuencia relativa de la calificación 10 es $2/20 = 0{,}1$.
- La frecuencia relativa de la calificación 9 es $3/20 = 0{,}15$.
- La frecuencia relativa de la calificación 8 es $2/20 = 0{,}1$.
- La frecuencia relativa de la calificación 7 es $3/20 = 0{,}15$.

Etcétera.

TABLA DE FRECUENCIAS

Variable estadística (Calificación)	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
10	2	2/20 = 0,1
9	3	3/20 = 0,15
8	2	2/20 = 0,1
7	3	3/20 = 0,15
5	4	4/20 = 0,2
4	2	2/20 = 0,1
3	4	4/20 = 0,2
	Total = 20	Total = 1

$$\text{Frecuencia relativa} = \frac{\text{Frecuencia absoluta}}{\text{Núm. de individuos de la población}}$$

Suma de frecuencias absolutas → 20

Suma de frecuencias relativas → 1

Observa en la tabla de frecuencias que:

a) **La suma de las frecuencias absolutas de los valores de la variable estadística es igual al número de individuos de la población** (en nuestro caso 20 alumnos).

b) **La suma de las frecuencias relativas de los valores de la variable estadística es igual a la unidad.**

Frecuencia absoluta de un valor de la variable estadística es el número de individuos de la población que poseen dicho valor.

Frecuencia relativa de un valor de la variable estadística es el cociente entre su frecuencia absoluta y el número de individuos de la población.

1. Lee atentamente y completa la tabla:

En una bolsa tenemos 22 lapiceros de colores.
El número de lapiceros de cada color es:

3 verdes — 2 azules
4 rojos — 6 marrones
5 amarillos — 2 rosas

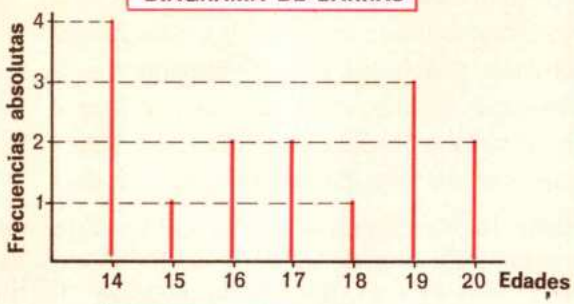
Variable estadística (color)	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa

Diagrama de barras.

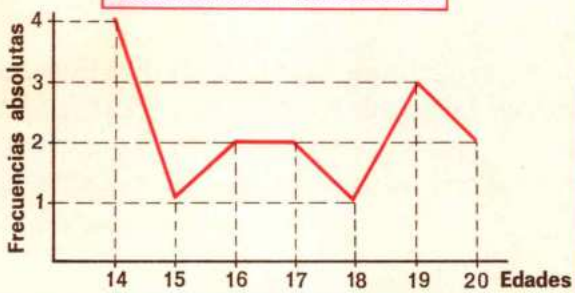
TABLA DE FRECUENCIAS

Edad (años)	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas
20	2	2/15 = 0,13
19	3	3/15 = 0,2
18	1	1/15 = 0,06
17	2	2/15 = 0,13
16	2	2/15 = 0,13
15	1	1/15 = 0,06
14	4	4/15 = 0,26

DIAGRAMA DE BARRAS



POLÍGONO DE FRECUENCIAS



Observa la tabla. En ella aparecen las frecuencias absolutas y relativas de las edades de un grupo de 15 personas.

Vamos a representar esta tabla de frecuencias en un **diagrama de barras.**

Utilizamos para ello un sistema de ejes cartesianos.

1. Sobre el eje de abscisas se representan los valores de la variable estadística.
2. Sobre el eje de ordenadas, las frecuencias absolutas o relativas.

Para cada uno de los valores del eje de abscisas trazamos un segmento perpendicular a dicho eje, con una longitud igual o proporcional a su frecuencia.

La unidad que tomemos sobre el eje de abscisas puede ser diferente a la unidad tomada sobre el eje de ordenadas.

Polígono de frecuencias.

Para construir el polígono de frecuencias relativo al ejemplo de las edades del grupo de 15 personas basta unir en el diagrama de barras los extremos superiores de dichas barras, y así se obtiene una línea poligonal llamada **polígono de frecuencias.**

1. Representa gráficamente:

A. A un grupo de 20 amigos se les ha preguntado qué medio de transporte utilizan para ir al colegio. Los resultados se ven en la tabla de la derecha.

Representa los datos de la tabla en diagrama de barras y después traza el polígono de frecuencias.

Variable estadística (medio de transporte)	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Transporte escolar	9	9/20
Autobús	5	5/20
Metro	4	4/20
Coche	2	2/20

B. En un huerto hay 40 árboles frutales.

La tabla representa los que hay de cada clase.

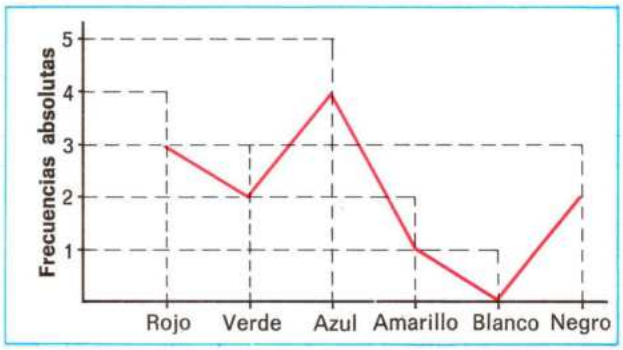
Haz la representación gráfica de estos datos en un diagrama de barras y en un polígono de frecuencias.

Variable estadística (clase de árbol)	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Peral	12	12/40
Manzano	8	8/40
Cerezo	14	14/40
Naranjo	6	6/40

Actividades

1. El siguiente polígono de frecuencias representa las canicas que de cada color hay en una bolsa. Observa este polígono y a partir de él completa la siguiente tabla estadística:

Color	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Rojo		
Verde		
Azul		
Amarillo		
Blanco		
Negro		

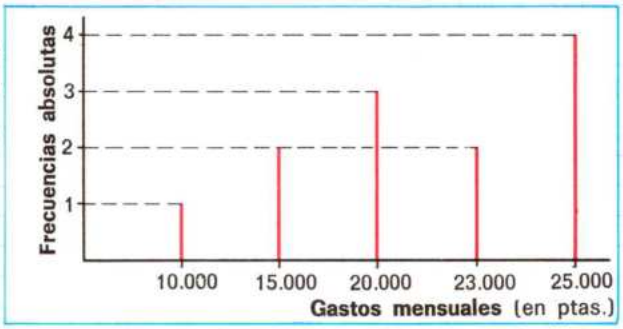


2. El diagrama de barras siguiente representa lo que un grupo de 12 personas gasta mensualmente. Obsérvalo y responde:

a) ¿Cuántas personas gastan 25.000 ptas. al mes?

b) ¿Cuántas personas gastan 23.000 ptas. al mes?

c) ¿Cuántas personas gastan 20.000 ptas. o más?



3. Un grupo de 15 amigos se han comprado cada uno un helado. La tabla indica la elección hecha por ellos.

Representa mediante polígono de frecuencia los datos de la tabla.

Variable estadística (clase de helado)	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Naranja	2	2/15
Limón	3	3/15
Nata	5	5/15
Chocolate	4	4/15
Vainilla	1	1/15

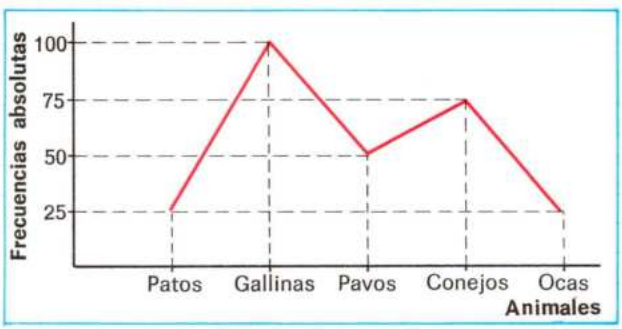
4. El siguiente diagrama expresa la cantidad de animales que hay de cada especie en una granja. Obsérvalo y responde:

a) ¿Cuántos pavos hay en la granja?

b) ¿Cuántos animales tiene en total la granja?

c) ¿Cuál de ellos está en mayor número?

d) ¿Cuál de ellos está en menor número?



5. Si el polígono de frecuencias anterior fuera de esta forma:

a) ¿Cuántos animales habría en la granja?

b) ¿Cuántos animales habría de cada especie?

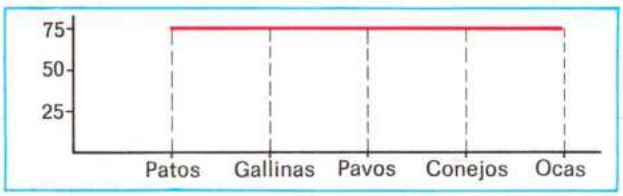
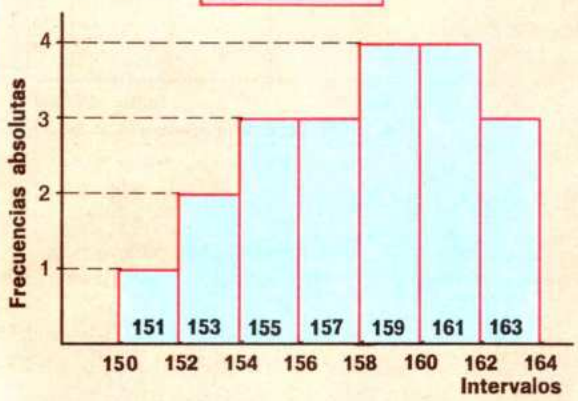


TABLA DE FRECUENCIAS

Intervalos o clases	Marcas de clase	Frecuencia absoluta
(150, 152)	151	1
(152, 154)	153	2
(154, 156)	155	3
(156, 158)	157	3
(158, 160)	159	4
(160, 162)	161	4
(162, 164)	163	3

HISTOGRAMA



Histogramas.

Se ha medido la altura de 20 alumnos. Los resultados en centímetros son los siguientes:

150, 156, 160, 158, 156, 152, 154, 162, 158, 160, 152, 154, 158, 160, 154, 160, 162, 158, 156, 162.

Vamos a agrupar estas medidas en intervalos o clases de 2 en 2 cm.

Así, el intervalo (150, 152) agrupa a los alumnos cuya altura es 150 cm o mayor que 150 cm, sin llegar a 152 cm.

El valor 151 se llama marca de clase o valor central de la clase.

La marca de clase del intervalo (152, 154) es 153.
La marca de clase del intervalo (154, 156) es 155.

En la tabla de frecuencias aparecen las alturas agrupadas en clases, con sus frecuencias absolutas respectivas.

En los casos como éste en que los valores de la variable estadística se agrupan en intervalos, se utiliza como representación gráfica el **histograma.**

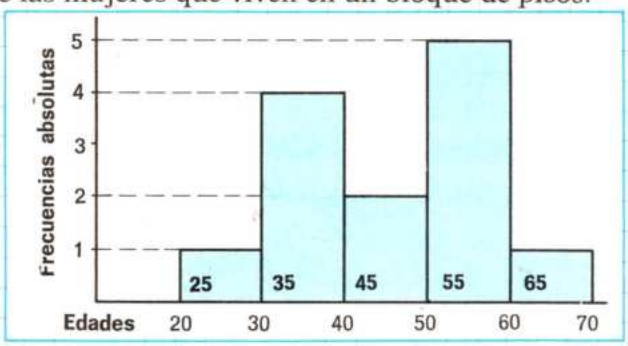
Vamos a representar los datos de la tabla mediante un histograma. Utilizamos para ello un sistema de ejes cartesianos.

1. Sobre el eje de abscisas se representan los intervalos.
2. Sobre el eje de ordenadas se representan las frecuencias absolutas o las frecuencias relativas.
3. Sobre cada intervalo se levanta un rectángulo de altura igual o proporcional a su frecuencia.

1. Interpreta los siguientes diagramas:

A. El siguiente histograma expresa las edades de las mujeres que viven en un bloque de pisos. Observa el histograma y responde:

- ¿Cuántas mujeres viven en el bloque de pisos?
- ¿Cuántas mujeres hay cuya edad sea mayor de 40 años y menor de 50?
- ¿Existe alguna mujer que viva en dicho bloque cuya edad sea de 10 años?
- ¿Cuántas mujeres hay cuya edad sea 40 años o más sin llegar a 60 años?



B. Si el histograma anterior fuera de esta forma ¿cuántas mujeres vivirían en el bloque de pisos?

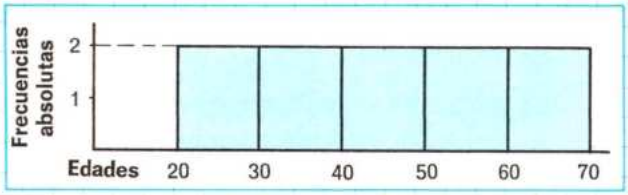
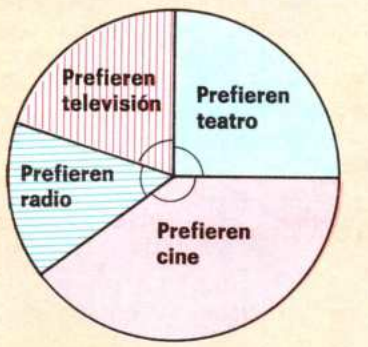


TABLA DE FRECUENCIAS

Preferencias	Frecuencias absolutas
Cine	40
Radio	15
Teatro	25
Televisión	20

DIAGRAMA DE SECTORES



72° 144° 90° 54°

Diagrama de sectores.

En una encuesta hecha a 100 personas sobre sus preferencias por el cine, la radio, el teatro o la televisión se han obtenido los resultados que figuran en la tabla estadística.

Para representar los resultados de esta encuesta en un círculo se dividen los 360° que tiene el círculo en partes proporcionales a las frecuencias.

Observa el reparto de 360 en partes proporcionales a 40, 15, 25 y 20.

Cantidad a repartir: 360°.

Suma: $40 + 15 + 25 + 20 = 100$

$$\frac{360}{100} = \frac{x}{40} = \frac{y}{15} = \frac{z}{25} = \frac{t}{20}$$

$x = \dfrac{360 \times 40}{100} = 144°$, que corresponden a los 40 que prefieren cine.

$y = \dfrac{360 \times 15}{100} = 54°$, que corresponden a los 15 que prefieren radio.

$z = \dfrac{360 \times 25}{100} = 90°$, que corresponden a los 25 que prefieren teatro.

$t = \dfrac{360 \times 20}{100} = 72°$, que corresponden a los 20 que prefieren televisión.

En el círculo se han trazado cuatro sectores circulares de 144°, 54°, 90° y 72°, que corresponden a las cuatro preferencias: cine, radio, teatro y televisión, respectivamente.

1. Representa mediante diagrama de sectores esta información:

Una empresa automovilística produce diariamente 400 coches de los modelos siguientes:

- 100 de tipo familiar.
- 200 de tipo utilitario.
- 60 de tipo deportivo.
- 40 de tipo furgoneta.

2. Representa mediante diagrama de sectores las siguientes tablas de frecuencias:

Variable estadística (edad)	Frecuencia absoluta
20	2
19	3
18	5
17	6
16	4
Total	**20**

Variable estadística (altura)	Frecuencia absoluta
155	6
156	7
157	5
158	8
159	4
Total	**30**

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. El número de miembros de cinco familias es el siguiente:

3 miembros 5 miembros 6 miembros 7 miembros 4 miembros

¿Cuál será:

a) la población o conjunto estadístico?

b) el individuo o unidad estadística?

c) la variable estadística?

2. Un niño ha ido anotando los tiempos invertidos para ir al colegio durante 10 días.

Los tiempos, en minutos, son los siguientes:

15 minutos 15 minutos
18 minutos 17 minutos
16 minutos 16 minutos
15 minutos 19 minutos
18 minutos 19 minutos

Completa la tabla de frecuencias.

Variable estadística (tiempo invertido)	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa

3. Las áreas en metros cuadrados de 20 pisos son las siguientes:

80 m^2	105 m^2	95 m^2	105 m^2
90 m^2	110 m^2	110 m^2	90 m^2
95 m^2	80 m^2	80 m^2	110 m^2
85 m^2	85 m^2	95 m^2	95 m^2
100 m^2	100 m^2	100 m^2	110 m^2

Completa la tabla de frecuencias.

Variable estadística (áreas)	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa

4. Representa en un diagrama de barras las tablas de frecuencias de los dos ejercicios anteriores.

5. Observa estas dos tablas de frecuencias:

Variable estadística (color)	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Blanco	4	4/20
Negro	3	3/20
Azul	7	7/20
Verde	5	5/20
Rojo	1	1/10

Variable estadística (altura en cm)	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
150	3	3/15
155	4	4/15
160	2	2/15
165	5	5/15
170	1	1/15

Representa cada tabla en un polígono de frecuencias.

6. Los volúmenes, en centímetros cúbicos, de 20 libros son los siguientes:

900 cm^3	910 cm^3	910 cm^3	900 cm^3	960 cm^3	930 cm^3	960 cm^3
900 cm^3	930 cm^3	960 cm^3	950 cm^3	920 cm^3	950 cm^3	960 cm^3
920 cm^3	940 cm^3	940 cm^3	960 cm^3	920 cm^3	950 cm^3	

a) Agrupa este conjunto de volúmenes en intervalos o clases de 10 en 10 cm^3.

b) Indica las marcas de cada clase y las frecuencias absolutas de cada intervalo.

c) Representa gráficamente dicha tabla mediante su histograma.

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

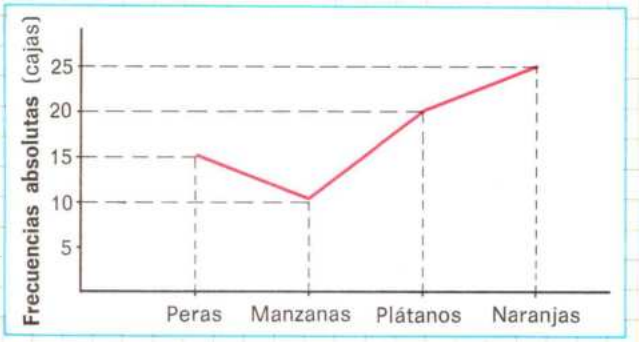
1. El diagrama de barras de la figura expresa el número de animales de cada clase que hay en un rancho.

a) Cada caballo bebe al día, aproximadamente, 5 litros de agua. ¿Cuántos litros de agua se necesitarán mensualmente para dar de beber a los caballos del rancho?

b) Cada vaca come al día, aproximadamente, 4 kg de pienso. ¿Cuánto costará mantener a todas las vacas del rancho diariamente si cada kilogramo de pienso cuesta 30 ptas.?

c) Cada toro come al día, aproximadamente, el doble de lo que come una cabra al día. Si cada cabra come diariamente 3 kg ¿cuánto costará mantener diariamente las cabras y toros del rancho si el precio del pienso es 30 ptas.?

2. La representación, en polígono de frecuencias, de la figura expresa el número de cajas de frutas que hay en un puesto.

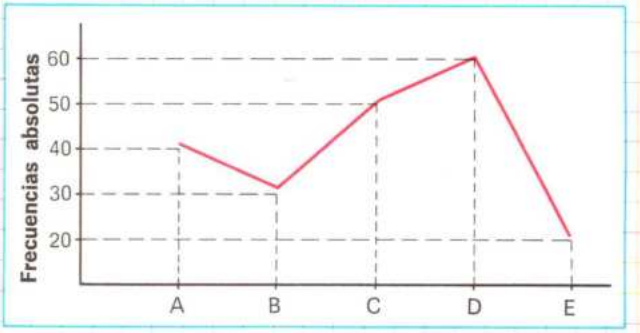


a) ¿Cuántos kilogramos de peras hay en el puesto si cada caja de peras pesa 20 kg?

b) El tendero ha pagado por las manzanas que tiene en el puesto 12.000 ptas. ¿Cuánto le ha costado cada kilogramo de manzanas si el peso de dichas cajas es igual a 40 kg cada una?

c) El tendero ha pagado por las naranjas que que hay en el puesto 10.000 ptas. ¿A cuánto tendrá que vender la caja si quiere ganar en cada caja 100 ptas.?

3. Un quiosco de periódicos recibe diariamente cinco tipos de periódicos en las cantidades que representa el diagrama.



a) Si cada periódico del tipo A cuesta 20 ptas. ¿cuánto habrá costado el lote de periódicos del tipo A?

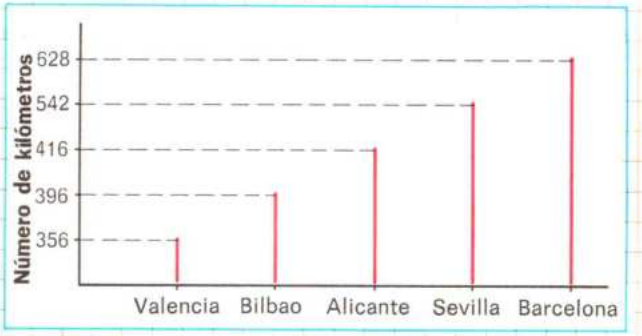
b) Si el precio de un periódico del tipo B cuesta doble que uno del tipo A ¿cuánto habrá costado el lote de periódicos del tipo B?

c) Los periódicos C, D y E tienen el mismo precio. Si por los tres lotes de periódicos C, D y E se han pagado 3.900 ptas. ¿cuál será el precio de un periódico del tipo C, D o E?

d) ¿Cuánto se habrá pagado por todos los periódicos?

4. El diagrama de barras de la figura expresa los kilómetros que hay desde Madrid a cada una de las ciudades que aparecen en el diagrama.

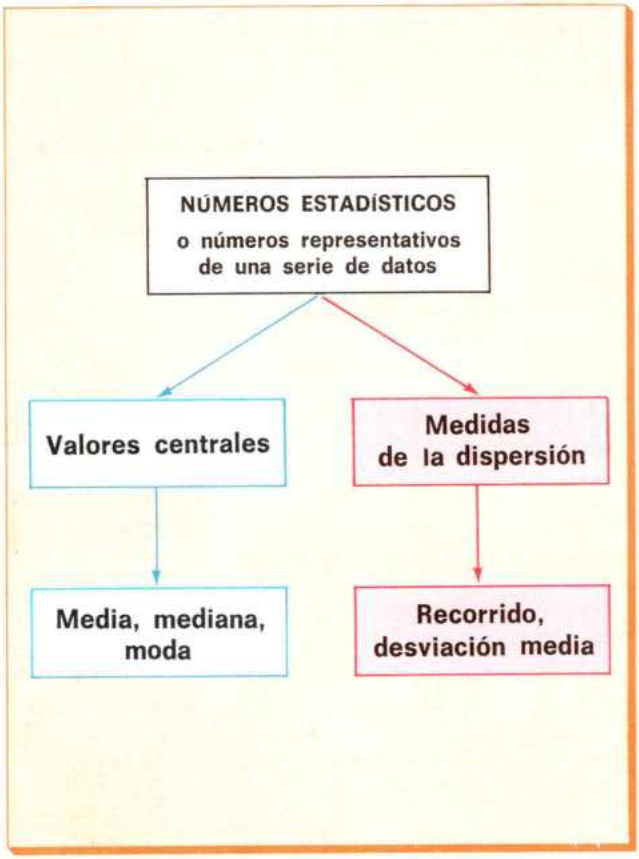
¿Cuánto costará hacer un viaje a cada una de las ciudades si el kilómetro cuesta 15 ptas.?



TEMA 25 VALORES CENTRALES Y DISPERSIÓN

1. Valores centrales. I

Números estadísticos.



Con frecuencia es conveniente establecer comparaciones entre dos series de observaciones o datos.

Por ejemplo, podemos estar interesados en comparar las tallas de los soldados de dos países, o las calificaciones de dos grupos de alumnos.

Las observaciones estadísticas se refieren siempre a un conjunto numeroso de datos. Por ser tan numerosos estos datos, es difícil comparar dos o más series entre sí.

Por eso es necesario considerar sólo unos valores numéricos representativos de cada serie.

Estos números representativos de cada serie de datos se llaman **números estadísticos.**

Los principales números estadísticos son los **valores centrales** y las **medidas de la dispersión.**

- Los valores centrales miden la tendencia de la serie a agruparse en torno a un valor. Los más importantes son la **media aritmética,** la **mediana** y la **moda.**
- Por el contrario, las medidas de dispersión miden la mayor o menor separación de los datos respecto de los valores centrales. Las principales medidas de dispersión son el recorrido y la desviación media.

Media aritmética simple.

MEDIA ARITMÉTICA SIMPLE DE 4, 5, 6 Y 9

$$m = \frac{4 + 6 + 5 + 9}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

MEDIA ARITMÉTICA SIMPLE DE LOS NÚMEROS $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$

$$m = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

Las notas de Matemáticas de un alumno en un mes han sido 4, 5, 6, 9; su nota media es:

$$\frac{4 + 5 + 6 + 9}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

El número 6 es la media aritmética simple de los números 4, 5, 6 y 9.

En general, el promedio o media aritmética simple **(m)** de una serie de **n** datos o números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ es:

$$m = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

La media aritmética simple de un conjunto de datos numéricos es el resultado de dividir la suma de todos los datos por el número de ellos.

Media aritmética ponderada.

MEDIA ARITMÉTICA PONDERADA

Años	Frecuencia absoluta F	Frecuencia relativa $fr = \frac{F}{N}$
20	5	5/20
21	3	3/20
22	5	5/20
25	7	7/20
	Suma N = 20	Suma = 1

$$m = 20 \cdot \frac{5}{20} + 21 \cdot \frac{3}{20} + 22 \cdot \frac{5}{20} + 25 \cdot \frac{7}{20} =$$

$$= \frac{100}{20} + \frac{63}{20} + \frac{110}{20} + \frac{175}{20} = \frac{448}{20} = 22{,}4$$

Variable	Frecuencia absoluta
x_1	F_1
x_2	F_2
x_3	F_3
⋮	⋮
x_n	F_n
	Suma = N

$$m = \frac{x_1 \cdot F_1 + x_2 \cdot F_2 + x_3 \cdot F_3 + \ldots + x_n \cdot F_n}{N}$$

Observa esta tabla de frecuencias en la que aparece la edad en años de los 20 jugadores de un equipo de fútbol (titulares y reservas).

La edad media (media aritmética ponderada) de los 20 jugadores es:

$$m = \frac{20 \times 5 + 21 \times 3 + 22 \times 5 + 25 \times 7}{20} =$$

$$= \frac{100 + 63 + 110 + 175}{20} = \frac{448}{20} = \mathbf{22{,}4}$$

Observa que se obtiene el mismo resultado si se multiplica cada valor de la variable por su frecuencia relativa y se suman los productos parciales obtenidos.

En general, si los valores x_1, x_2, x_3, ... x_n aparecen con las frecuencias absolutas F_1, F_2, F_3, ... F_n, la media aritmética ponderada se define por la fórmula:

$$m = \frac{x_1 \cdot F_1 + x_2 \cdot F_2 + x_3 \cdot F_3 + \ldots + x_n \cdot F_n}{F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n}$$

Y como $F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = N$ (n.º total de casos) resulta:

$$m = \frac{x_1 \cdot F_1 + x_2 \cdot F_2 + x_3 \cdot F_3 + \ldots + x_n \cdot F_n}{N}$$

La media aritmética ponderada se halla multiplicando los valores de la variable estadística por su frecuencia absoluta y dividiendo la suma de estos productos por el número total de casos.

1. Resuelve estos problemas:

A. Mide la altura, en centímetros, de los miembros de tu familia y calcula la altura media.

B. Un taxista ha recorrido durante una semana los siguientes kilómetros:

Lunes → 100 km Jueves → 200 km Domingo → 95 km
Martes → 150 km Viernes → 180 km
Miércoles → 185 km Sábado → 210 km

Calcula la media de kilómetros que recorre por día.

C. La siguiente tabla expresa las edades de un grupo de 15 niños.

Completa la tabla en tu cuaderno calculando las frecuencias relativas y calcula la edad media de este grupo de niños.

Variable estadística (edades)	Frecuencia absoluta
10	5
11	4
12	2
14	1
16	3

Mediana.

CÁLCULO DE LA MEDIANA

Primer caso

El número de datos es impar

Medianas

Ejemplo 1: 2, 4, **8**, 10, 12

Ejemplo 2: 1, 4, 5, **6**, 7, 9, 10

Segundo caso

El número de datos es par

Ejemplo: 1, 2, 4, **5, 6**, 8, 9, 10

$$\frac{5+6}{2} = 5{,}5$$

Mediana: **5,5**

PRIMER CASO

Cuando el número de datos es impar.

Considera los siguientes números: 2, 4, 8, 10, 12

Observa que:

a) Estos números están ordenados de menor a mayor.

b) El número 8 ocupa el lugar central de la serie.

c) Hay dos números menores que 8 y dos números mayores que 8.

Decimos que el 8 es la **mediana** del conjunto de los números dados.

SEGUNDO CASO

Cuando el número de datos es par.

Considera ahora los siguientes números:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

Observa que:

a) Estos números están ordenados de menor a mayor.

b) Hay dos números, el 5 y el 6, en la parte central de la serie.

Calculamos la media aritmética de los números 5 y 6, que es $\frac{5+6}{2} = 5{,}5$, y la llamamos mediana **M** del conjunto de los números dados.

Si el conjunto ordenado de números tiene un número impar de valores, la mediana es el válor que ocupa la posición central.

Si el conjunto ordenado de números tiene un número par de valores, entonces la mediana es la media aritmética de los dos valores centrales.

1. Calcula la mediana de las siguientes series de números:

a) 2, 4, 6, 8, 10 b) 3, 5, 8, 9, 10, 11

2. Completa las siguientes series de números para que la mediana en cada caso sea 5:

a) 3, 4, , 6, 7 b) 1, 2, 4, , 6, 8, 10 c) 1, 2, , 6, 8, 9

3. Di si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) 1, 2, 3, 4, 5 → Su mediana es 3.

b) 5, 6, 7, 8, 9, 10 → No tiene mediana.

c) 10, 12, 14, 16, 18, 20 → Su mediana es 15.

4. Calcula la mediana de las edades de los miembros de tu familia.

5. Contesta:

Tenemos una serie de 11 números ordenados de menor a mayor. ¿Cuántos números tendrán un valor mayor que la mediana? ¿Cuántos tendrán un valor menor?

Moda.

MODA

Variable estadística calificación	Frecuencia absoluta
10	2
9	3
8	4
Moda → 7	6
6	4
5	1
	Total = 20

Observa la tabla de la figura. Aparecen las calificaciones obtenidas por un grupo de 20 alumnos en Matemáticas.

La calificación que tiene mayor frecuencia absoluta es 7.

Al valor de la variable estadística que más se repite, en este caso el 7, lo llamamos **moda** del conjunto de calificaciones de estos 20 alumnos.

Moda es el valor de la variable estadística que tiene mayor frecuencia absoluta.

1. Indica cuál es la moda en las siguientes tablas de frecuencias:

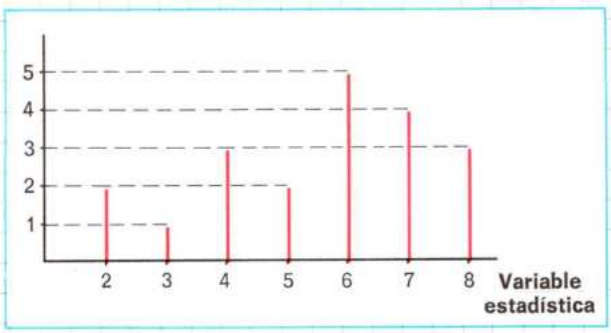
Variable estadística (altura en cm)	Frecuencia absoluta
154	3
158	1
160	5
162	7
165	2
166	2

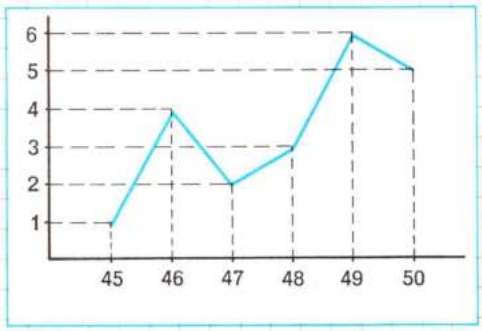
Variable estadística (color)	Frecuencia absoluta
Blanco	3
Rojo	4
Azul	10
Verde	5
Amarillo	2
Negro	6

2. Representa gráficamente las tablas anteriores y señala la moda de cada una de ellas.

3. Contesta:

¿Cuál sería la moda en las gráficas siguientes?





4. Haz las tablas de frecuencias y calcula las modas.

A. De una biblioteca en la que hay los siguientes libros:

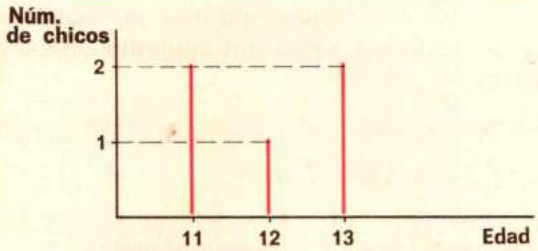
- 20 de historia.
- 40 de novelas.
- 15 de literatura.
- 25 de poesía.

B. De un grupo de 20 niños, 5 prefieren jugar a las canicas, 10 prefieren jugar al fútbol, 3 al baloncesto y 2 al balonmano.

Recorrido.

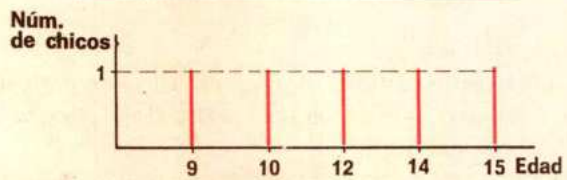
MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Diagrama de barras de las edades de los chicos del grupo A



Media grupo A = 12 años

Diagrama de barras de las edades de los chicos del grupo B



Media grupo B = 12 años

RECORRIDO

Grupo A: 13 − 11 = 2

Grupo B: 15 − 9 = 6

Observa los diagramas de barras.

- En el primer diagrama se han representado las edades de un grupo A de 5 chicos; sus edades son:

  11, 11, 12, 13, 13 años

  La edad media de este grupo de chicos es:

$$m = \frac{2 \times 11 + 12 + 2 \times 13}{5} = \frac{60}{5} = 12 \text{ años}$$

- Las edades de otro grupo B de 5 chicos son:

  9, 10, 12, 14, 15 años

  La edad media de este grupo es:

$$m = \frac{9 + 10 + 12 + 14 + 15}{5} = \frac{60}{5} = 12 \text{ años}$$

En los dos grupos, la edad media es la misma; sin embargo, los dos gráficos son distintos.

En el grupo B hay más dispersión de edades que en el grupo A. Las edades de los chicos del grupo B se desvían más de la media que las edades de los chicos del grupo A.

Para medir estas desviaciones entre los datos (edades) y la media aritmética se suelen usar, entre otras medidas, **el recorrido** y **la desviación media.**

El recorrido de una serie de datos es la diferencia entre el mayor valor y el menor valor de ellos. Así:

- El recorrido del grupo A es: 13 − 11 = 2.
- El recorrido del grupo B es: 15 − 9 = 6.

El recorrido sólo depende de los valores extremos, no dice nada de los valores intermedios.

Recorrido es la diferencia entre el mayor valor y el menor valor que toma la variable estadística.

1. El número de hermanos de un grupo de 4 niños es: 2, 3, 3, 4.
El número de hermanos de otro grupo de 4 niños es: 1, 1, 5, 5.

a) Representa los datos de cada grupo gráficamente.

b) Calcula el número medio de hermanos de cada grupo.

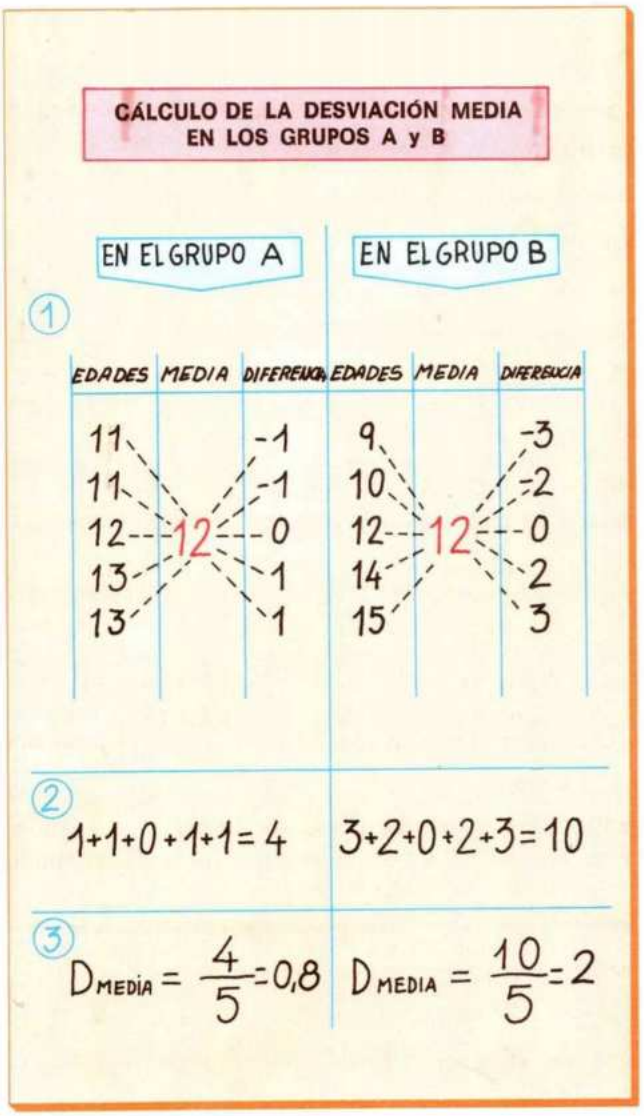
c) ¿En cuál de los dos grupos hay más dispersión?

d) Calcula el recorrido en cada grupo.

2. Calcula el recorrido en las siguientes series de números:

a) 3, 3, 4, 5, 6, 7 b) 2, 3, 4, 4, 5 c) 1, 2, 2, 2, 3 d) 4, 5, 5, 6, 6

Desviación media.



Acabamos de ver que las medias aritméticas de los dos grupos de chicos son iguales (12 años), y que las edades de los chicos del grupo B se desvían más de la media que las edades de los chicos del grupo A.

Una medida de la dispersión que tiene en cuenta no sólo los valores extremos, sino también los valores intermedios, es la **desviación media.**

Para hallar la desviación media de cada grupo se procede así:

① Se calcula la diferencia entre cada valor y la media:

- Desviaciones del grupo A: $-1,\ -1,\ 0,\ 1,\ 1.$
- Desviaciones del grupo B: $-3,\ -2,\ 0,\ 2,\ 3.$

② Se suman los valores absolutos de estas diferencias:

Grupo A: $/-1/ + /-1/ + /0/ + /1/ + /1/ =$
$= 1 + 1 + 0 + 1 + 1 = 4.$

Grupo B: $/-3/ + /-2/ + /0/ + /2/ + /3/ =$
$= 3 + 2 + 0 + 2 + 3 = 10.$

③ Se dividen estas sumas por el número de valores y así se obtiene la desviación media de cada grupo.

Desviación media del grupo A $= \frac{4}{5} = 0{,}8.$

Desviación media del grupo B $= \frac{10}{5} = 2.$

El hecho de que la dispersión de los datos con respecto a la media en el grupo B sea mayor que en el grupo A queda reflejado en las desviaciones medias 2 y 0,8.

1. Resuelve estos problemas:

A. Los pesos en kilogramos de 7 niños son: 43, 43, 45, 45, 45, 47, 47; los pesos de otro grupo de 7 niños son: 42, 42, 43, 45, 46, 48, 49. Indica la dispersión de pesos en los dos casos según se ha indicado en el procedimiento anterior.

B. Las calificaciones de 8 alumnos son: 9, 8, 8, 8, 7, 5, 5, 6; las calificaciones de otros 8 alumnos son: 9, 8, 8, 7, 7, 6, 6, 5.

¿Cuáles son sus desviaciones con respecto a la media?

¿Cuál de los dos grupos de alumnos tiene mayor dispersión?

C. Las alturas de 5 niños, en centímetros, son: 151, 149, 148, 147, 145; las alturas de otros 5 niños son: 155, 154, 154, 154, 153.

Calcula la dispersión de alturas.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. En un día se han registrado las siguientes temperaturas:

   7°, 9°, 10°, 12°, 15°, 18°, 20°

   Calcula la temperatura media en ese día.

2. Las horas que un futbolista ha entrenado cada día durante una semana son:

   5 horas, 6 horas, 4,5 horas, 7 horas, 5 horas, 4 horas, 3,5 horas.

   Calcula el número medio de horas que entrena por día.

3. Si te dicen que el gasto medio de una familia por mes es de 45.000 ptas. ¿cuánto gastará esta familia al año?

4. Los tiempos invertidos por un grupo de 14 niños para ir al colegio son:

   10 minutos, 18 minutos, 20 minutos, 15 minutos, 20 minutos, 30 minutos, 35 minutos, 8 minutos, 15 minutos, 19 minutos, 35 minutos, 40 minutos, 45 minutos, 10 minutos.

   Calcula el tiempo medio que empleará cada niño en el ir al colegio.

5. ¿Cuál sería la moda del ejercicio anterior?

6. Las edades de 5 hermanos son: 3, 4, 6, 8, 9.

   Las edades de otros cinco hermanos son: 7, 9, 11, 13, 15.

   - ¿Cuál serán las desviaciones de cada grupo con respecto a sus medias?
   - ¿Cuál de los dos tiene mayor dispersión?

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. Lo que ha gastado una familia durante un año ha sido:

Enero	40.000 ptas.	Julio	36.000 ptas.
Febrero	35.000 ptas.	Agosto	45.000 ptas.
Marzo	38.000 ptas.	Septiembre	43.000 ptas.
Abril	41.000 ptas.	Octubre	34.000 ptas.
Mayo	30.000 ptas.	Noviembre	31.000 ptas.
Junio	39.000 ptas.	Diciembre	44.000 ptas.

   ¿Cuál será el gasto medio por mes?
   Si los ingresos son 60.000 ptas. al mes ¿cuánto habrá ahorrado en ese año?

2. Una fábrica produce un artículo A. La media mensual en un año es de 500 artículos.

   El precio de dicho artículo es de 50.000 ptas. Al año siguiente aumenta su media mensual en 100 unidades.

   ¿Qué beneficio anual obtendrá dicha fábrica con respecto al año anterior sabiendo que el artículo experimenta una subida de 6.000 ptas. la unidad?

MATEMÁTICAS 7

EDUCACIÓN GENERAL BÁSICA

El material didáctico de Educación General Básica ha sido creado en el Departamento de Investigaciones Educativas de Santillana, S. A. bajo la dirección de **Antonio Ramos**

El material de MATEMÁTICAS para el séptimo curso ha sido programado y elaborado por el siguiente equipo **José Gil**
Pilar García
Jaime Mascaró

Dirección editorial **Julián Abad**

Ilustraciones **Antonio Aragüez**
Rafael Ortega
José Valera
Carlos Aguilera

santillana

La realización gráfica y editorial del libro MATEMÁTICAS ha sido efectuada en el equipo de Ediciones Santillana por los siguientes especialistas, bajo la dirección técnica de Francisco Romero: *Diseño:* José Luis García, José Huertas, David Cabacas y Jesús Pérez. *Confección y montaje:* Lucio Gómez, Félix Rotella y Luciano Aguilar. Correctores: Francisco Viciana y Eugenio Miguel. *Coordinación técnica:* Julio Fernández. *Coordinación artística:* Pedro García.

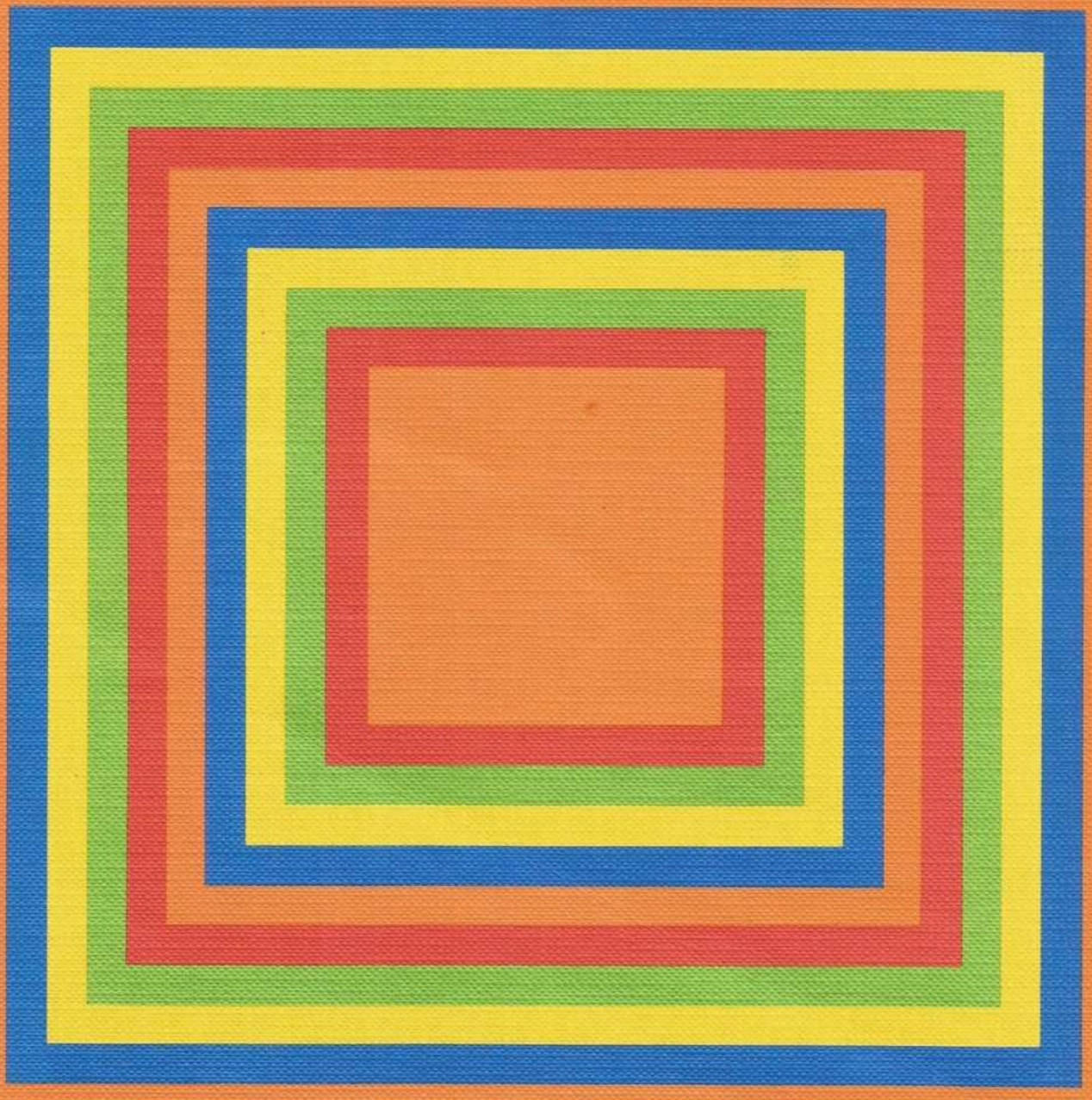
Los ejercicios y actividades de este libro deben ser realizados por el alumno en un cuaderno.

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del «Copyright», bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos.

© 1983 by SANTILLANA, S. A.
Elfo, 32 - 28027 Madrid
PRINTED IN SPAIN
Impreso en España en los
Talleres Gráficos Mateu Cromo, S. A.
Ctra. de Pinto a Fuenlabrada, s/n. Pinto (Madrid)
ISBN: 84-294-2084-3
Depósito Legal: M. 8.978-1990

Texto aprobado por el Ministerio de Educación y Ciencia en O.M. de 8-7-1983

EDUCACIÓN GENERAL BÁSICA



0-2084-5